

~~278~~ N. 3025. 893

~~435~~ V. B.

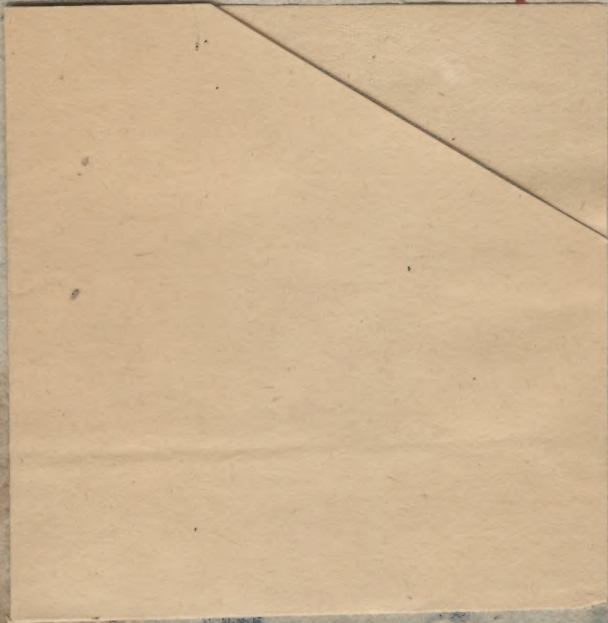
desideratum
оф. 1м

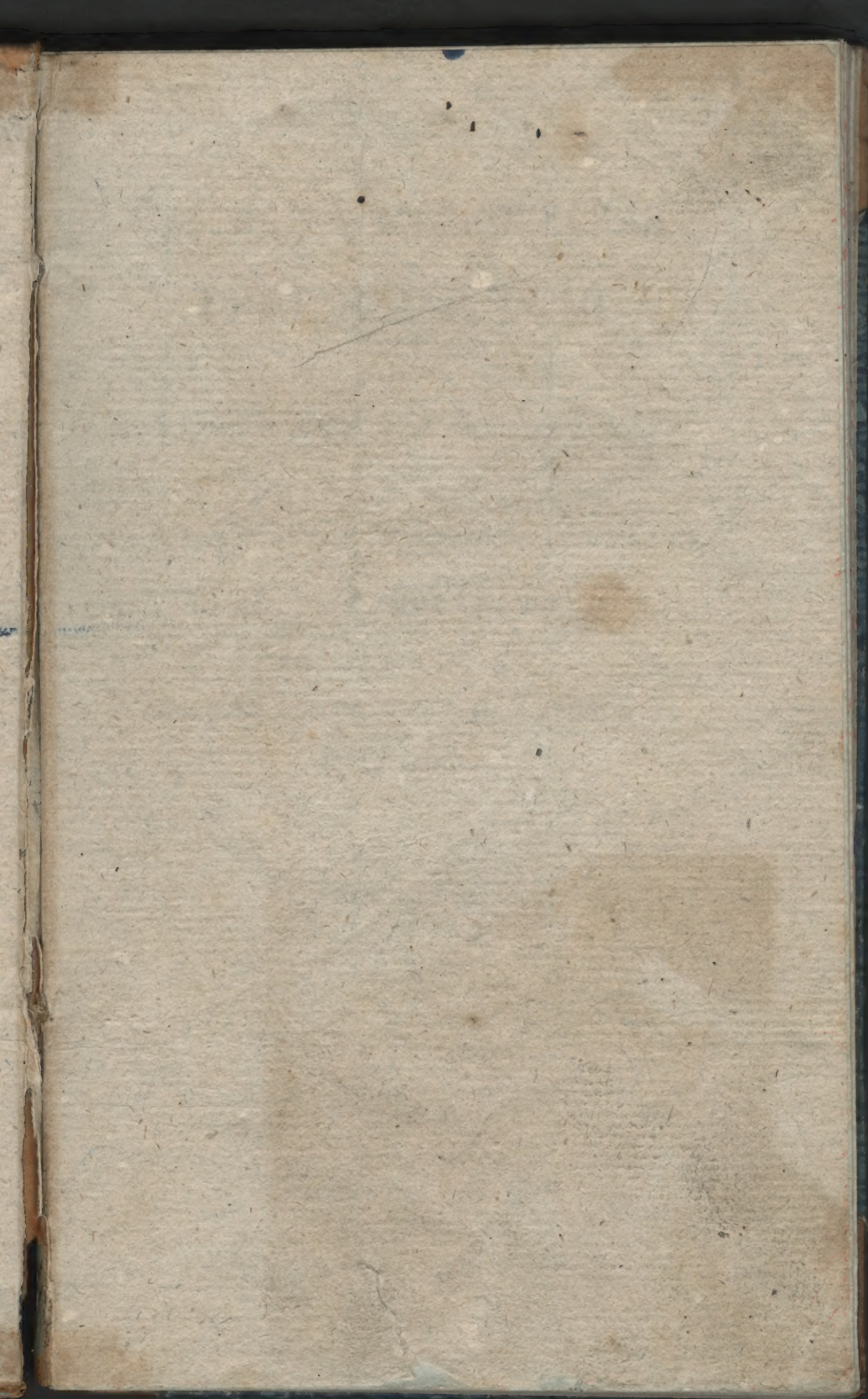
~~Б. 359.~~ 3р

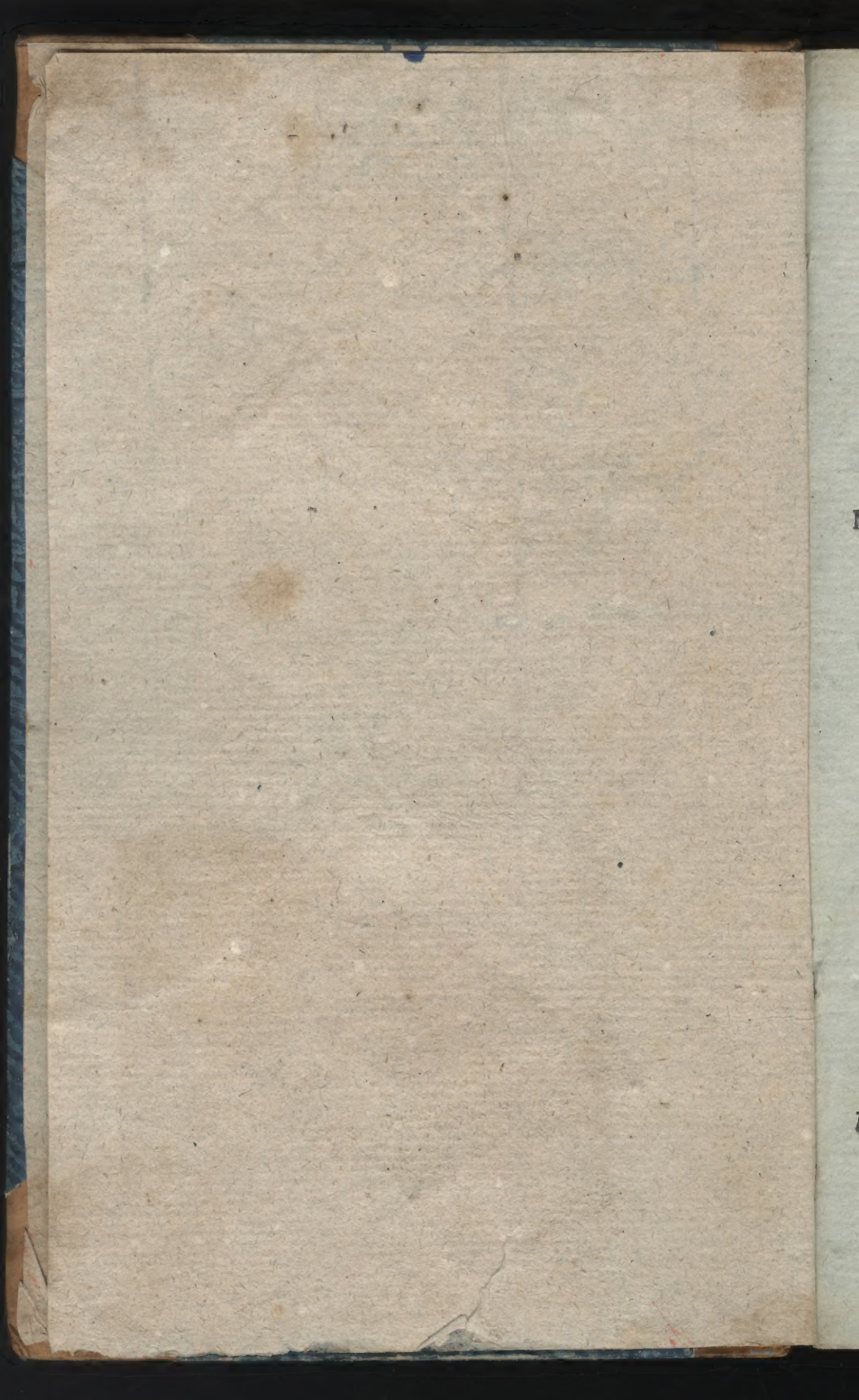
Проверено
1963 г.

~~744~~
~~893~~

V. B.





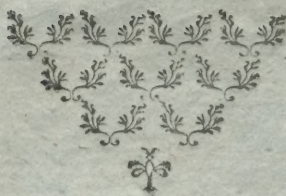


Проверено
1953 г.

ПЛОСКАЯ и СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

Переведенный изъ курса Г. Безу
Морского Шляхешнаго Кадешскаго
Корпуса Гимназистами

Иваномъ Соболевымъ и Никифоромъ
Асбедьвымъ,



Печатаны вторымъ тисненіемъ при Типографіи
оногожъ Корпуса, 1800 года.



О тригонометріи.

266. Слово тригонометрія значитъ мѣра треугольниковъ. Вообще же разумѣется подъ симъ именемъ наука опредѣлять положенія и измѣренія различныхъ частей протяженія, зная нѣкоторыя изъ оныхъ.

Если представимъ, что различныя точки воображаемыя въ какомъ нибудь пространствѣ, соединены взаимно прямыми линіями; то три вещи предлежатъ будутъ нашему разсужденію: 1 сдѣла сихъ линій; 2 с углы, которые онѣ между собою составляютъ; 3 с углы составляемые плоскостями, на коихъ онѣ линіи самою вещію, или мысленно находящіяся. Отъ сравненія сихъ трехъ предмѣтовъ зависить рѣшеніе всѣхъ вопросовъ, которые можно предложить о измѣреніи протяженія, и частей онаго. Наука же опредѣлять всѣ сии вещи, зная нѣкоторыя изъ оныхъ, состоитъ въ рѣшеніи сихъ двухъ главныхъ вопросовъ:

1 ой. Зная три изъ шести вещей, которыя входятъ въ прямолинійный треугольникъ, найти три другія, когда сѣ возможно.

2 ой. Зная три изъ шести вещей составляющихъ сферической треугольникъ, (т. е. треугольникъ составленный на поверхности шара изъ трехъ дугъ круга, имѣющихъ центромъ центръ сего же самого шара) найти три прочія, когда сѣ возможно.

Первый вопросъ есть предмѣтъ Тригонометріи, называемой плоскою тригонометріею: послѣду шесть вещей въ оной разсуждаемыя, суть на одной и той же плоскости. Называютъ ее также тригонометріею прямолинійною.

Второй вопросъ принадлежитъ тригонометрии сферической. Шестъ вещей въ ней разсуждаемыя, суть на различныхъ плоскостяхъ, какъ въ послѣдствіи увидимъ.

О плоской или прямолинейной тригонометрии.

267. Плоская тригонометрія есть часть Геометріи, которая научаетъ опредѣлять или вычислять при извѣстии вещей прямолинейнаго треугольника, зная при другія части, когда сіе возможно.

Фиг. 140. Когда сіе возможно, говорю; ибо если бы на прим. извѣстны были только при угла, то не лзя бы было опредѣлить сторонъ. И въ самой вещи, ежели чрезъ точку в, взяую произвольно на сторонѣ ав треугольника авс, котораго, положимъ, при угла извѣстны, проведена будетъ де параллельная вс; то будетъ треугольникъ аде, имѣющій тѣже углы, какіе и треугольникъ авс (37). А изъ сего видно, что можно такимъ образомъ сосавить безчисленное множество другихъ треугольниковъ, кои будутъ имѣть тѣже самыя углы. Слѣдовательно вычисленіе должно бы показатъ вдругъ безчисленное множество различныхъ сторонъ. И такъ вопросъ въ семъ случаѣ есть совершенно неопредѣленный.

Мы увидимъ однакожъ, что ежели не можно опредѣлить величинъ сторонъ, можно по крайней мѣрѣ опредѣлить ихъ содержаніе.

Но когда изъ трехъ извѣстныхъ или данныхъ вещей, будетъ одна сторона, то можно всегда опредѣлить все прочее. Однако есть одинъ случай, въ которомъ оспается нѣчто неопредѣлительнымъ; а именно: положимъ, что въ

треугольникъ $авс$ извѣстны двѣ стороны $ав$ и $фиг. 141.$
 $вс$, и уголъ $а$, прощавулежащій одной изъ сихъ
 сторонъ: не лзя опредѣлить величины угла $с$,
 ниже стороны $ас$, развѣ зная, острый или тупой
 сей уголъ $с$. Въ самомъ дѣлѣ, ежели представишь,
 что точкою $в$, какъ центромъ, и радиусомъ рав-
 нымъ сторонѣ $вс$, будешь описана дуга $св$, и
 ежели отъ $в$, гдѣ сія дуга встрѣчается съ $ас$,
 будешь проведена $вд$; то составится другой тре-
 угольникъ $авд$, въ которомъ будешь все то
 извѣстно, что извѣстно въ треугольникѣ $авс$,
 т. е. уголъ $а$, сторона $ав$ и сторона $вд$ равная
 $вс$; и такъ имѣемъ здѣсь тѣже вещи для опре-
 дѣленія угла $вда$, какія были въ треугольникѣ
 $авс$ для опредѣленія угла $с$.

Но между симъ и предвѣдущимъ случаемъ
 находится та разность, что здѣсь можно опре-
 дѣлить величину угла $с$ и угла $вда$, какъ мы сіе
 увидимъ въ послѣдствіи. Остается только не-
 опредѣленнымъ, которую изъ сихъ двухъ вели-
 чинъ должно принять, и слѣдовательно какой
 образъ долженъ имѣть треугольникъ. И такъ
 сверхъ трехъ данныхъ вещей, должно еще
 знать, острый или тупой долженъ быть искомый
 уголъ. Впрочемъ можно замѣтить мноюходомъ,
 что два угла $с$ и $вда$, о которыхъ разсуждаеш-
 ся, суть супплементъ (неполненіе) одинъ другому;
 ибо уголъ $вда$ есть супплементъ угла $всс$, кото-
 рый равенъ углу $с$; понеже треугольникъ $всд$
 есть равнобедренный.

268. Не самые углы употребляются въ вы-
 численіи треугольниковъ; полагаются вмѣсто
 оныхъ линіи, которыя, хотя имъ и непропорці-
 ональны, однако могутъ представлять сіи углы,
 и при томъ гораздо способнѣе для употребленія
 въ вычисленіи; ибо, какъ мы ниже сего увидимъ,
 онѣ пропорціональны сторонамъ треугольниковъ;

прилично убо не простираясь далѣе, показать
сѣи линѣи, и изъяснить, какъ могутъ онѣ засту-
пить мѣсто угловъ.

О синусахъ, косинусахъ, тангенсахъ,
котангенсахъ, секансахъ и косекан-
сахъ.

269. Перпендикуляръ $ар$ опущенный отъ
фиг. 142. края дуги $ав$ на радиусъ $вс$ проходящій чрезъ
другой край $в$ сѣи дуги, называется синусъ (синъ)
прямой, или просто синусъ дуги $ав$ или угла
 $асв$.

Вр Часть радиуса находящаяся между синусомъ
и краемъ дуги, называется синусъ версусъ
(обращенный синъ).

Вд Часть перпендикуляра возставленнаго на
концѣ радиуса, заключающаяся между симъ ради-
усомъ $вс$ и радиусомъ $са$ продолженнымъ, назы-
вается тангенсъ (прикасающаяся) дуги $ав$ или
угла $асв$.

Линѣя $сд$, которая есть радиусъ $са$, продол-
женный до тангенса, называется секансъ (сѣку-
щая) дуги $ав$ или угла $асв$.

Еслили проведенъ будетъ радиусъ $сг$ пер-
пендикулярный $кв$ $св$, и при окончаніи онаго
 $г$ перпендикулярная прямая $ег$, встрѣчающаяся
съ продолженнымъ радиусомъ $са$ на точкѣ $е$; и
еслии наконецъ опущена будетъ на $сг$ перпенди-
кулярная прямая $ақ$; то слѣдуетъ изъ предъ-
идущихъ опредѣленій, что $ақ$ будетъ синусъ, $гқ$
синусъ версусъ, $ге$ тангенсъ, и $се$ секансъ дуги
 $ав$ или угла $асг$.

Но какъ уголъ $асг$ есть комплементъ (до-
полненіе) угла $асв$; ибо сѣи два угла составляютъ
прямой уголъ; то можно сказать, что $ақ$ есть

синусъ комплемента, FQ синусъ версусъ комплемента, EF тангенсъ комплемента, а CF секансъ комплемента дуги AB или угла ACB .

Дабы сократить сѣи наименованія, согласилась называть косинусомъ (косиномъ), синусъ комплемента; косинусомъ версусомъ (сообращеннымъ синомъ), синусъ версусъ комплемента; котангенсомъ (соприкасаательною), тангенсъ комплемента; и косекансомъ (сообъющею), секансъ комплемента. Почему линіи AQ , FQ , FE , се будутъ называемы косинусъ; косинусъ версусъ, котангенсъ и косекансъ дуги AB или угла ACB ; также линіи AR , BR , BR , CR могутъ быть называемы косинусъ, косинусъ версусъ, котангенсъ и косекансъ дуги AF или угла ACF ; ибо дуга AB есть комплементъ дуги AF , также какъ AF комплементъ AB .

Для означенія сихъ линій, говоря о какомъ либо углу или дугѣ; мы будемъ спавить предъ буквами, означающими сей уголъ или сію дугу, сокращенныя слова: син. косин. тан. кош. И такъ син. AB будетъ значить синусъ дуги AB ; син. ACB будетъ значить синусъ угла ACB ; также кос. AB , кос. ACB будутъ значить косинусъ дуги AB , косинусъ угла ACB ; а для означенія радіуса будемъ употреблять букву R .

270. Отсюда явствуетъ, т.е. что косинусъ AQ какой нибудь дуги AB равенъ части сѣ радиуса содержимой между центромъ и синусомъ.

28. Что синусъ версусъ BR равенъ разности между радіусомъ и косинусомъ.

38. Что синусъ какой либо дуги AB есть половина хорды AG двукратной дуги AB . Ибо радіусъ CB будучи перпендикуляренъ къ хордѣ AG , раздѣляетъ сію хорду и дугу на двѣ равныя части (52).

271. Изъ сего послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что синусъ 30° равенъ половинѣ радиуса; ибо онъ есть половинна хорды 60° ; или синусъ правильного шестиугольника въ кругѣ вписаннаго, которая, какъ мы видѣли (93), равна радиусу.

272. Тангенсъ 45° равенъ радиусу. Ибо естъли уголъ асв естъ 45° , а уголъ свг прямой, то уголъ сгв будетъ также равенъ 45° ; слѣдовательно треугольникъ свг будетъ равнобедренный, а посему всг равенъ св.

273. По мѣрѣ увеличиванія дуги ав или угла асв, синусъ ихъ ав увеличивается, а косинусъ асг или сг уменьшается, доколѣ дуга ав сдѣлается 90° ; тогда синусъ ав сдѣлается вс, то есть равенъ радиусу, а косинусъ нуль. Посему, когда точка а падаетъ на г, перпендикуляръ асг становится нуль.

Въ разсужденіи тангенса вс и котангенса ег, явно, что тангенсъ вс увеличивается безпрестанно, а котангенсъ ег напротивъ того уменьшается; такъ что когда дуга ав 90° , тангенсъ ся безконеченъ, а котангенсъ нуль. И дѣйствительно, чемъ больше становится дуга ав, тѣмъ болѣе точка в возвышается надъ вс, и когда точка а крайне близка къ г, двѣ линіи св и всг дѣлаются почти параллельны, и встрѣчаются въ безпредѣльномъ разстояніи; слѣдовательно вс тогда безконечна; посему она таковую бываетъ, когда точка а падаетъ на точку г.

274. Ипакъ синусъ дуги 90° равенъ радиусу, косинусъ нуль, тангенсъ безконеченъ, а котангенсъ нуль.

Посему синусъ 90° есть самый большій изъ всѣхъ синусовъ, то называютъ его для отличія онъ другихъ, цѣлымъ синусомъ, такъ что синусъ выраженія синусъ 90° , радиусъ и цѣлый синусъ значатъ то же.

275. Когда дуга ав спановишся больше 90° , фиг. 143. синусъ ся ар уменьшается, а косинусъ ас или ср, который падаетъ тогда по другую сторону центра въ разсужденіи точки р, увеличивается до толъ, пока дуга ав сдѣлается 180° ; тогда синусъ ся нуль, а косинусъ равенъ радіусу. Видно также, что синусъ ар, и косинусъ ср дуги ав или угла асв, который больше 90° , принадлежащъ и дугѣ ан или углу асн меншему 90° и супплементу перваго; такъ что дабы имѣти синусъ и косинусъ другаго угла, должно взять синусъ и косинусъ сего супплементна. Но должно примѣтить, что косинусъ падаетъ со стороны противоположащей той, на которую бы онъ палъ, если бы дуга ав или уголъ асв былъ меньше 90° .

Въ разсужденіи тангенса, понеже онъ опредѣляется (269) встрѣчею перпендикуляра въ сѣ продолженнымъ радіусомъ са. явствуемъ, что когда дуга ав больше 90° , онъ бываетъ въ; но возставивъ перпендикуляръ нј, можно видѣти, фиг. 143. что треугольникъ свд равенъ треугольнику снј; и что посему вд равна нј.

276. И такъ тангенсъ дуги или угла большаго 90° , есть толъ же, что и тангенсъ супплементна сего дуги. Вся разность состоятъ въ томъ, что онъ падаетъ ниже радіуса в с. Чтожъ касается до котангенса еф, онъ есть толъ же что и котангенсъ супплементна, и падаетъ со стороны противоположащей той, на которую бы онъ палъ, если бы дуга ав, или уголъ асв былъ меньше 90° . Явствуемъ также, что тангенсъ 180° есть нуль, а котангенсъ безконеченъ.

277. Предположивъ сіи понятія, представимъ, фиг. 144. что четверть окружности вф раздѣлена на дуги равныя одной минутѣ, ш. с. на 5400 равныхъ

частей, и что отъ каждой почки раздѣленія
опущены перпендикулярныя прямыя, или синусы,
какъ ар на радіусъ вс; представимъ также,
что сей радіусъ вс раздѣленъ на весьма многія
равныя часпи, на 100000; на примѣръ: каждая
изъ перпендикулярныхъ прямыхъ будетъ содер-
жать нѣкоторое число сихъ частей радіуса: и
такъ если бы можно было какимъ нибудь
образомъ опредѣлить число частей каждаго изъ
сихъ перпендикуляровъ, то явствуемъ, что сіи
линіи могли бы послужить къ опредѣленію
величины угловъ, такъ что если бы написавъ
по порядку въ одномъ столбцѣ всѣ минушы,
начиная отъ нуля до 90° , написано было въ
другомъ столбцѣ на сторонѣ и насупротивъ каж-
дой минушы, число частей соотвѣтствующаго
перпендикуляра; можно бы было помощію сей
таблицы узнать число градусовъ угла, косо
число частей перпендикуляра или синуса извѣст-
но; и обратно, зная число градусовъ и частей
градуса угла, можно бы было узнать число частей
его синуса. Сія таблица имѣла бы такую
пользу не только для всѣхъ дугъ или угловъ,
концы радіусъ имѣлъ бы тоже число частей,
что и шотъ, на который сочинена таблица, но
еще и для всякой другой дуги или угла имѣющаго
фиг. 144. извѣстный радіусъ; на примѣръ да будетъ уголъ
всг имѣющій сторону или радіусъ св 8 футовъ,
а перпендикуляръ де въ 3 фута; да будетъ са
радіусъ, по которому вычислены таблицы. Если
представить дугу ав и перпендикуляръ ар, то
сей перпендикуляръ будетъ синусъ таблицъ: и
такъ я удобно могу найти, изъ какихъ
частей состоитъ сія перпендикулярная прямая.
Ибо какъ треугольники сде, сар подобны,
(понеже де и ар суть параллельны); то будетъ
(109) $cd:de::ca:ar$, ш. е. $8ф:3ф::100000:ar$; и

такъ я найду (Ариѳ. 179), что а р равна 37500; слѣдовательно остается мнѣ сыскать сіе число въ таблицѣ между синусами, гдѣ напрошавъ его увижу число градусовъ и минутъ угла дсг или дсе.

Обратно, ежели бы дано было число градусовъ и минутъ угла дсг и его радіусъ сд, можно бы также опредѣлить величину перпендикулярной де; понеже, зная число градусовъ и минутъ сего угла, можно найти въ таблицѣ и число частей перпендикуляра или синуса а р, соотвѣствующаго сему числу градусовъ; и тогда по свойству подобныхъ треугольниковъ сар, сде, будѣтъ сія пропорція са:ар::сд:де, по коей удобно вычислить де, ибо три первые члена са, а р и сд извѣстны, а имено са и а р изъ таблицъ, а сд дана въ фукахъ.

Отсюда явствуетъ, что синусы суть тѣ линіи, кои, какъ мы выше (268) сказали, могутъ замѣнять углы въ вычисленіи треугольниковъ.

278. Но не одни только синусы къ сему употребленію: также тангенсы и секансы. Сія линія легко вычислится можно, когда уже однажды вычислены всѣ синусы. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ сра, свд можно взять слѣдующія пропорціи:

ср:ра::св:вд,
и ср:са::св:сд,
то есть (ибо ср равна аq)
кос. ав:син. ав::r:тан. ав
и кос. ав:r::r:сек. ав.

Въ каждой изъ сихъ пропорцій три первые члена извѣстны, когда извѣстны вѣ синусы; понеже косинусъ какой либо дуги не что иное есть, какъ синусъ комплемента сего дуги: и такъ удобно существуетъ (Ариѳ. 179) четвертой членъ

каждой пропорціи, то есть тангенсы и секансы, а посему также котангенсы и косекансы, которые суть тангенсы и секансы комплементовъ.

279. Впрочемъ двѣ послѣднія пропорціи, которыя мы теперь показали, не только для вычисленія тангенсовъ и секансовъ полезны, но весьма употребительны и во многихъ другихъ случаяхъ, какъ мы увидимъ въ продолженіи; и такъ должно стараться зашвердить ихъ. Вспоря на примѣрѣ заключеніи слѣдующее свойство, на которомъ основано сочиненіе правыхъ картъ: подобно, какъ мы доказали, что $\cos. a : v :: r : \sec. a$, v , можно доказать въ разсужденіи всякой другой дуги vo , что $\cos. vo : r :: r : \sec. vo$. Снѣ двѣ пропорціи, имѣя средніе члены и тѣже, должны имѣть произведенія крайнихъ ихъ членовъ равныя (Ариѳ. 178); слѣдовательно можно (Ариѳ. 180) составить изъ крайнихъ членовъ той и другой новую пропорцію, которая будетъ имѣть крайними членами крайніе члены одной, а средними крайніе другой, такъ что будетъ $\cos. a : \cos. vo :: \sec. vo : \sec. a$. Откуда можно заключить, что косинусы двухъ дугъ суть въ обратномъ содержаніи ихъ секансовъ.

280. Вещь еще другая пропорція полезная во многихъ случаяхъ, изъ которой также можно вывести, что тангенсы двухъ дугъ суть въ обратномъ содержаніи ихъ котангенсовъ: треугольники $свд$, $сгг$ суть подобные, ибо, сверхъ прямого угла при точкѣ $в$ и при точкѣ $г$, уголъ $дсв$ равенъ углу $сгг$, поелику $св$ и $гг$ суть параллельныя; по чему будетъ $vo : св :: сг : ге$, т. е. $\tan. a : r :: r : \cot. a$. Можно доказать подобнымъ образомъ, что $\tan. vo : r :: r : \cot. vo$; чего ради $\tan. a : \tan. vo :: \cot. vo : \cot. a$.

Книги, заключающія величины всѣхъ упомя-
нутыхъ линій, называются таблицы синусовъ: онѣ содержатъ обыкновенно не токмо числительныя величины всѣхъ сихъ линій, но и логарифмы ихъ, которые употребляются всегда, когда возможно, вмѣсто числительныхъ величинъ. Слѣжъ самыя таблицы заключающія логарифмы натуральныхъ чиселъ, которыя мы показали въ Арифметикѣ.

Прежде нежели покажемъ употребленіе сихъ таблицъ для означенія треугольниковъ, опишемся намъ поговорить о составленіи ихъ: т. е. о способѣ, по которому вычислены, или можно вычислить синусы, и пр. ч. Мы шѣмъ охотнѣе къ сему прислушались, чѣмъ предлагая, которыя мы имѣемъ показаны на сей предлогъ, и на другіе намъ послужатъ.

281. Дѣбы найти косинусъ дуги, которой синусъ извѣстенъ, должно опустить квадрать синуса онъ квадрата радиуса, и извлечь квадратный корень изъ остатка. Ибо косинусъ aq равенъ прямой pc , которая есть одна изъ сторонъ при прямомъ углѣ въ прямоугольномъ треугольникѣ ars , коего гипотенуза as и сторона ar въ семъ случаѣ извѣстны (166). фиг. 142.

И такъ если бы потребно было найти косинусъ 30° ; то, какъ мы видѣли (271), что синусъ 30° есть половина радиуса, которой мы положимъ здѣсь изъ 100000 частей, сей синусъ былъ бы 50000; опустивъ его квадратъ 2500000000 отъ 10000000000 квадрата радиуса, останется 7500000000, коего квадратный корень 86603 есть косинусъ 30° или синусъ 60° .

282. Дѣбы, зная синусъ дуги av , найти синусъ половины ея, надлежитъ въпервыхъ вычислить косинусъ сей первой дуги, и опустивъ

его отъ радіуса, что покажетъ синусъ версусъ в π ; потомъ взявъ квадратиъ изъ в π , сложиши оный съ квадратомъ синуса а π ; сумма (166) будетъ квадратъ хорды а π ; изваски квадратный корень изъ сей суммы будетъ найдена а π , копорой половина есть в π синусъ дуги въ половинѣ а π (270).

283. Зная синусъ в π дуги в π ; дабы найти синусъ а π дуги а π в, копорая есть двукратна сей дуги, должно вычислѣть косинусъ с π дуги в π , и сдѣлать сію пропорцію, $к : \cos. в\pi :: 2 \sin. в\pi : \sin. а\pi$, въ копорѣ, посылку первые три члена извѣстны въ семъ случаѣ, четвертый легко вычисленіемъ найдется.

Сія пропорція основана на томъ, что два-треугольника с π и в π суть подобны: понеже, сверхъ прямого угла въ π и въ π они имѣють еще уголъ в общій. И такъ $св : с\pi :: ав : а\pi$, но с π (270) есть косинусъ дуги в π , а ав двукратная в π , есть синусъ дуги в π ; а π синусъ дуги а π в; и св радіусъ; чего ради $к : \cos. в\pi :: 2 \sin. в\pi : \sin. а\pi$.

фиг. 146.

284. Дабы, зная синусы двухъ дугъ ав, ас, найти синусъ ихъ суммы, или ихъ разности, должно, вычислѣть (281) косинусы сихъ самыхъ дугъ, умножиши синусъ первый на косинусъ вторыя, и синусъ вторыя на косинусъ первыя. Сумма сихъ двухъ произведеній, раздѣленная на радіусъ, будетъ синусъ суммы сихъ дугъ. Разность же сихъ самыхъ произведеній, раздѣленная на радіусъ, будетъ синусъ разности сихъ двухъ дугъ.

Сдѣлай дугу а π равную дугѣ ас, проводи хорду с π и радіусъ л π , который раздѣлай сію хорду по поламъ на точкѣ π ; отъ точекъ с, а, π и в опусти перпендикулярныя ск, а π , π н, в π на в π ; наконецъ отъ точекъ π и в проводи π м и в π

параллельныя прямой вл. Понеже ср раздѣлена по поламъ на шоккѣ j, то и см будеть также раздѣлена по поламъ на шоккѣ м (102). Примѣнимъ, что ср, которая есть синусъ дуги вс, суммы двухъ дугъ, состоящѣ изъ км и мс, или изъ jн и мс, рѣ, которая есть синусъ дуги вр, разности двухъ дугъ, равна прямой кн, сія же равна прямой км безъ мн, т. е. jн безъ см. И такъ, чтобъ найти синусъ суммы, должно сложить величину прямой jн съ величиною прямой мс; а чтобъ найти синусъ разности, надлежитъ отнять сію отъ оной.

Подобные треугольники лаг, ljn дають
 $ла : lj :: аг : jн$, т. е. $р : кос. ас :: син. ав : jн$.
 Слѣдовательно (Арие. 179) jн равна $\frac{син. ав \times кос. ас}{р}$.

Подобные же треугольники лаг и сjm (ибо по сочиненію имѣють стороны взаимно перпендикулярныя) дають (112) $ла : лг :: сj : мс$, или $р : кос. ав :: син. ас : мс$. Слѣдовательно мс равна $\frac{син. ас \times кос. ав}{р}$; чего ради должно сложить $\frac{син. ас \times кос. ав}{р}$ съ $\frac{син. ав \times кос. ас}{р}$, дабы найти синусъ суммы; и напротивъ того отнять первое количество отъ втораго, что бы получить синусъ разности.

285. Дабы найти косинусъ суммы или разности двухъ дугъ, которыхъ извѣстны синусы, надлежитъ, вычисливъ (281) косинусы каждой изъ оныхъ, умножить ихъ взаимно; и также умножить оба синуса; потомъ отнять второс произведеніе отъ перваго, и раздѣля остатокъ на радіусъ, будемъ имѣть косинусъ суммы двухъ дугъ. Напротивъ, чтобъ найти косинусъ разности, надлежитъ сложить два произведенія, и сумму ихъ раздѣлить на радіусъ.

Изо, послѣку вс раздѣчена по поламъ въ почкѣ
 ј, ек будещъ также раздѣчена по поламъ въ
 почкѣ н; сѣдовашельно прямая лк, косинусъ
 суммы, равна прямой лн безъ нк, или лн безъ
 јм; а лѣ косинусъ разности равна лн выѣсѣ сѣ
 нѣ, или лн сѣ нк, или наконецъ лн сѣ јм. По-
 смотримъ же какія суть величины прямыхъ лн
 и јм.

Въ подобныхъ треугольникахъ лга, лнј
 имѣемъ $ла : лј :: лг : лн$. ш. с. р: кос. ас :: кос.
 $ав : лн$; сѣдовашельно лн равна $\frac{\text{кос. ас} \times \text{кос. ав}}{р}$

Подобныя треугольники лаг, сјм дають
 $ла : аг :: сј : јм$, шо есть р: син. ав :: син. ас :
 јм; сѣдовашельно јм равна $\frac{\text{син. ав} \times \text{син. ас}}{р}$; и
 такъ, чшобы найти косинусъ суммы, должно
 отнять $\frac{\text{син. ав} \times \text{син. ас}}{р}$ отъ $\frac{\text{кос. ав} \times \text{кос. ас}}{р}$; на-
 противъ же шого должно сѣ количества сложишь,
 чшобы найти косинусъ разности.

фиг. 147. 286. Сумма синусовъ двухъ дугъ ав, ас,
 содержишя къ разности сихъ синусовъ,
 такъ какъ тангенсъ полусуммы сихъ двухъ
 дугъ, содержишя къ тангенсу ихъ полураз-
 ности; шо есть, син. ав + син. ас : син. ав —
 син. ас :: тан. $\frac{ав + ас}{2}$: тан. $\frac{ав - ас}{2}$

Проведя діаметръ ам, опиши дугу аѳ равную
 дугѣ ав; и соединя хорду аѳ, которая будещъ
 перпендикулярна къ ам, чрезъ почку с проводи
 сѣ перпендикулярную, и сѣ параллельную прямой
 ам; отъ почки е проводи хорды еѳ и еѳ, и
 радіусы еѳ равнымъ радіусу круга ваѳ, опиши
 дугу јѳк, встрѣчающую сѣ на почкѣ г, и отъ
 сей точки г возставь прямую нл перпендикуляр-
 ную къ сѣ; лиаѳи гн и гл суть тангенсы угловъ

дѣл и сѣл на угловѣ сѣв и сѣд, кои имѣя свои вершины на окружности, измѣняются пол-винами дугъ св, сд, на которыхъ они споятъ (63), т. е. половиною разности вс, и половиною суммы св двухъ дугъ ав, ас. И такъ сѣ и сд суть тангенсы полусуммы и полуразности сихъ самыхъ дугъ.

Положивъ сѣ, явствуетъ, что, посланку вс равна вс, будетъ $де = вс + се$ или $вс + сд$, т. е. равна суммѣ синусовъ дугъ ав, ас: такъ же $вс = вс - се$ или $вс - сд$, т. е. равна разности синусовъ сихъ же самыхъ дугъ. Но понеже вв и нл суть параллельны, имѣмъ (115) $де : ве :: лг : гн$; чего ради син. $ав +$ син. $ас$; син. $ав -$ син. $ас$; ; тан. $\frac{ав + ас}{2}$: тан. $\frac{ав - ас}{2}$.

287. Отсюда явствуетъ, что сумма косинусовъ двухъ дугъ, содержицца къ разности сихъ косинусовъ, такъ какъ ко тангенсъ полусуммы сихъ дугъ, къ тангенсу полуразности ихъ.

Ибо: понеже косинусы суть синусы комплементовъ, слѣдуетъ изъ предвѣдущей пропорціи, что сумма косинусовъ содержицца къ ихъ разности, такъ какъ тангенсъ полусуммы комплементовъ, къ тангенсу полуразности сихъ комплементовъ. Но полусумма комплементовъ двухъ дугъ есть комплементъ полусуммы, а полуразность комплементовъ есть тоже, что и полуразность дугъ; слѣдовательно. и проч.

288. Предложенныя три начала (271, 282, 284) доставляютъ податъ свѣдѣніе о сочиненіи таблицы синусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, зная синусъ 30° по упомянутымъ способамъ, (271 и 282) можно найти синусъ 15° , и постепенно синусы 7° , $30'$; 3° , $45'$; 1° , $52'$, $30''$; 0° , $56'$, $15''$; 0° , $28'$, $7''$, $30'''$; 0° , $14'$, $3''$, $45'''$; 0° , $7'$, $1''$, $52'''$, $30''''$.

Положивъ сіе, должно замѣнить, что весьма малыя дуги нечувствительно различивуютъ отъ своихъ синусовъ, сдѣлавательно они почти пропорциональны симъ синусамъ; и такъ, чтобъ найти синусъ $1'$, должно послать сію пропорцію: дуга $0^\circ. 7'. 1''. 52'''$ содержишя къ дугѣ $0^\circ. 1'$, такъ какъ синусъ первой дуги, къ синусу дуги $1'$.

Если въ семъ вычисленіи радиусъ полагается изъ 10000 часшей только, то надлежитъ вычислить синусы упомянутыхъ дугъ съ тремя десятичными, дабы можно было отсюда заключить о послѣдующихъ, не ошибаясь болѣе, какъ единицею; послѣ чего удобно будетъ приступить къ другимъ такимъ образомъ.

Начиная отъ $1'$ до $3^\circ. 0'$ довольно будетъ умножать синусъ $1'$ послѣдовательно на 2, 3, 4, 5 и проч. дабы имѣть синусы $2'$, $3'$, и проч. не ошибаясь болѣе, какъ единицею.

Дабы вычислить синусы дугъ большихъ $3^\circ. 0'$; должно прибѣгнуть къ тому, что сказано (284); но много сокращишя работа, естли по сему началу вычислить синусы отъ градусовъ до градусовъ только. Чтожъ касается до минутъ, можно сему удовлетворить, взявъ разность синусовъ двухъ послѣдственныхъ градусовъ, и сдѣлавъ сію пропорцію: $60'$ содержишя къ числу искомымъ минутъ, такъ какъ разность синусовъ двухъ ближайшихъ градусовъ къ четвертому числу, которое приложивъ къ меньшему изъ двухъ синусовъ, найется синусъ числа градусовъ и минутъ искомымъ. На прим. сыскавъ, что синусы 8° и 9° суть 13017 и 15643, естли бы я пожелалъ найти синусъ $8^\circ. 17'$, то взявъ бы разность 1726 сихъ синусовъ, и вычислялъ четвертый членъ пропорціи, коея при первыхъ членахъ суть $60' : 17' :: 1726 :$

Сей четвертый членъ, который найдется почти 489, будучи приложенъ къ 13917, получасмъ 14406 для синуса $8^{\circ} 17'$, такъ какъ онъ есть въ таблицахъ, ошибаясь развѣ единицею.

Причина сей пропорціи основывася на томъ, фиг. 129. что когда дуга кЛ мала, какъ на прим. въ 1° ; то разности ЛМ, ЈС синусовъ ЛГ, ЈН почти пропорціональны разностямъ кЛ, кЈ соотвѣствующимъ дугѣ аЛ, аЈ; ибо треугольники кМЛ, кНЈ, которые можно почесать за прямолинейные, суть подобны.

289. Сей способъ долженъ быть употребляемъ фиг. 148. только до 87° . Ибо прескупивъ сей предѣлъ не можно принять іу за разность синусовъ рв, қх; понеже количество ихъ сколь ни мало имѣетъ чувствительное содержаніе къ іу, и пѣмъ большее, чемъ ближе дуга ав къ 90° . Въ семъ случаѣ должно, припомнить, что (170) линіи де, dt, которые суть разности радіуса и синусовъ рв, қх, пропорціональны квадрашамъ хордъ дв и dx, или (понеже дуги дв и dx весьма малы) квадрашамъ дугъ дв и dx; чего ради вычисливъ синусъ 87° , должно взять разность между имъ и радіусомъ 10000; и для сысканія синуса всякой другой дуги между 87° и 90° , должно послать сію пропорцію: квадратъ 3° или $180'$ содержится къ квадрату числа минутъ complemensa искомой дуги, такъ какъ разность между радіусомъ и синусомъ 87° къ четвертому члену, который будетъ dt, и который отнявъ отъ радіуса, получимъ ст или қх синусъ искомой дуги. На примѣръ, сыскавъ, что синусъ 87° есть 99863, естли я пожелаю имѣть синусъ дуги $88^{\circ} 24'$, которой complementsъ есть $1^{\circ} 36'$ или $96'$; то сдѣлаю сію пропорцію:
 $\frac{180'}{96'} :: 137 : dt$, по которой найду, что dt

составляетъ почини 39; ошняяв же онѣ радѹса 100000, получу 99061 для синуса $88^{\circ} 24'$, такъ какъ онѣ и дѣйствительно споннѣ въ таблицахъ.

290. Вычисливъ такимъ образомъ синусы, можно легко найти тангенсы и секансы, какъ о томъ сказано (278).

291. Вычисливъ синусы, должно вычислить ихъ логарифмы. такъ же какъ вычисляющѣ логарифмы чиселъ. Однако примѣнимъ, что если бы взята была изъ таблицъ численная величина одного изъ синусовъ, ради вычисления логарифма его по правилу показанному (Ариф. 239), то сысканной логарифмъ не былъ бы точно тотъ, которой находится въ таблицѣ логарифмовъ синусовъ. Ибо синусы таблицъ вычислены были первоначально, полагая радѹсъ изъ 1000000000 частей; но какъ обыкновенныя вычисления не прѣбуютъ такой точности, то ошляли въ настоящихъ таблицахъ 5 послѣднихъ знаковъ онѣ численные величины синусовъ, тангенсовъ и проч. такъ что сѣ величины, каковы онѣ дѣйствительно находятся въ таблицахъ, суть только приближенныя; но погрѣшность не простирается далѣе единицы на 100000. Число же принадлежитъ до логарифмовъ синусовъ, тангенсовъ и пр. то оставили ихъ таковыми, каковы они были вычислены для радѹса состоящаго изъ 1000000000 частей; и для сѣй по причины характеристика ихъ больше нежеланіи какую полагаетъ численная величина соответствующаго синуса или соответствующаго тангенса; такъ что когда употребляютъ логарифмы синусовъ, тангенсовъ и проч. тогда полагаемъ, что радѹсъ состоящій изъ 1000000000 частей; когда же употребляютъ численные величины синусовъ и тангенсовъ, принимаемъ радѹсъ изъ 100000 частей только.

Что касается до логарифмовъ тангенсовъ и секансовъ, оныя находящіяся помощію простаго сложенія и вычитанія, когда уже найдены логарифмы синусовъ. Сие слѣдуетъ изъ того, что сказано (278) и (Арх. 232).

292. Хотя обыкновенныя таблицы показывають синусы, тангенсы и проч. только для градусовъ и минутъ; однако можно по нимъ найти величины сихъ самыхъ линій для градусовъ, минутъ и секундъ, слѣдуя точно тому, что мы показали касательно однихъ градусовъ и минутъ. Но какъ чаще употребляются логарифмы сихъ линій вмѣстѣ самыхъ линій, то мы остановимся нѣсколько на семъ послѣднемъ предметѣ.

Положивъ, что вмѣстѣ логарифмы синусовъ и тангенсовъ на каждую минуту; когда попросится найти логарифмъ синуса какого либо известнаго числа градусовъ, минутъ и секундъ, должно взять логарифмъ синуса числа градусовъ и минутъ; должно также взять разность двухъ ближайшихъ логарифмовъ, которая напечатана на сторонѣ; (если же въ таблицахъ логарифмовъ не напечатаны логарифмическія разности, то можно ихъ находить, вычитая меньшій логарифмъ изъ большаго къ ему ближайшаго); и потомъ слѣдуетъ сію пропорцію: 60" содержащаяся къ данному числу секундъ, такъ какъ разность логарифмовъ взятая въ таблицахъ къ численному числу, который приложивъ къ логарифму синуса даннаго числа градусовъ, минутъ и секундъ.

Естьлибъ, напротивъ того, данъ былъ логарифмъ синуса соответствующій точному числу градусовъ и минутъ; то, дабы найти секунды, надлежало бы составлять сію пропорцію: разность двухъ логарифмовъ, между коими на-

ходитсѣ данный логарифмъ, содержитсяъ къ разности сего логариѣма, и логариѣма, который сего меньше и ближайшій къ сѣму въ таблицѣ, такъ какъ 60" къ четвертому члену; сѣй членъ покажетъ число секундъ, которыя должно приложить къ числу градусовъ и минутъ дуги находящейся въ таблицѣ, непосредственно меньше искомой.

Должно сдѣлать сѣму правилу, доколѣ дуга не меньше 3°; когда же она будетъ меньше, тогда можно поступить такъ какъ въ сѣмъ примѣрѣ. Положимъ, что требуется синусъ 1°, 55', 48"; должно сдѣлать сѣю пропорцію: 1°, 55': 1°, 55', 48" :: синусъ 1°, 55' къ четвертому члену, который (ибо малыя дуги пропорціональны ихъ синусамъ) будетъ безъ чувствительной погрѣшности синусъ 1°, 55', 48". Для удобнѣйшаго вычисленія должно привести два первые члена въ секунды; потомъ взявъ въ таблицѣ логарифмъ синуса 1°, 55', который есть третій членъ, должно къ нему приложить логарифмъ 1°, 55', 48" приведенныхъ въ секунды; наконецъ отъ суммы отнять логарифмъ 1°, 55' приведенныхъ въ секунды; остатокъ будетъ (Арх. 232) логарифмъ четвертаго члена, то есть логарифмъ искомый.

Обратно, чтобъ найти число градусовъ, минутъ и секундъ дуги меньшей 3°, и которой данъ синусъ, надлежитъ прискаать въ таблицахъ число градусовъ и минутъ; потомъ составить сѣю пропорцію: синусъ присканнаго числа градусовъ и минутъ содержитсяъ къ данному синусу, такъ какъ сѣе число градусовъ и минутъ приведенныхъ въ секунды, къ цѣлому числу секундъ искомой дуги. И такъ по логарифмамъ дѣйствіе будетъ приведено къ тому, чтобъ взять разность между логарифмомъ

предлагаемаго синуса, и логарифмомъ синуса числа градусовъ и минутъ, который непосредственно меньше даннаго, и придашь сѣю разность къ логарифму сего числа градусовъ и минутъ приведенныхъ въ секунды; сума будетъ логарифмъ числа секундъ, которымъ равна искомая дуга. На примѣрѣ, ежели данъ будетъ 8, 62:3427 логарифмъ синуса дуги; я во первыхъ нахожу въ таблицахъ, что самое ближайшее число есть 2° , $24'$, и что разность между логарифмами предлагаемаго синуса и синуса сѣей послѣдней дуги есть 0, 0013811; пошомъ складываю сѣю разность съ 3, 9365137 логарифмомъ 2° , $24'$ приведенныхъ въ секунды, сума 3, 9378948 соотвѣтствующая въ таблицахъ логарифмовъ числу 8667, которое является число секундъ искомой дуги; по сему искомая дуга будетъ 2° , $24'$, $27''$. Сѣе правило есть обратное предвидушаго.

Что принадлежитъ до логарифмовъ тангенсовъ, должно слѣдовать тѣмъ же правиламъ, переменная слово синусъ на тангенсъ; надлежитъ только исключитъ дуги находящіяся между 87° и 90° , для коихъ прилагаемъ слѣдующее правило. Вычисли логарифмъ тангенса комплементна по предписанному правилу для тангенсовъ, и отними сѣей логарифмъ отъ двукратнаго логарифма радиуса. Дѣйствительно въ силу сказаннаго (280) тангенсъ есть четвертый членъ пропорціи, коея первые три члена суть, котангенсъ, радиусъ и радиусъ. Если бы напротивъ того данъ былъ логарифмъ тангенса дуги, которая находясь между 87° и 90° должна была бы имѣть секунды; то отнявъ сѣей логарифмъ отъ двукратнаго логарифма радиуса, имѣли бы логарифмъ тангенса комплементна дуги, которая, посылку необходимо находится между 0° и 3° ,

удобно бы была опредѣлена изъ предвѣдущаго; взявъ же комплементъ дуги тако найденной, получали бы и искомую дугу.

293. Понеже синусъ дуги есть половина хорды двукратныя дуги, то если бы по предположенному началу (282) дошли до синуса дуги самой ближайшей въ 1', и удвоивъ сей синусъ, попомъ увеличилъ его во столько кратъ, сколько дуга стягиваемая хордою равною двукратному синусу содержится къ полуокружности, явствуетъ, что было бы найдено число весьма близкое къ длинѣ полуокружности, но нѣсколько меньшее; если бы также по данной пропорціи (278) вычислили тангенсъ той же дуги, и удвоивъ его увеличилъ попомъ во столько кратъ, сколько двукратная сей дуги содержится къ полуокружности; то получали бы число крайнее близкое къ полуокружности, но нѣсколько большее; и такъ помяну вычисленія синусовъ можно близко дійти до содержанія діаметра къ окружности. Мы не остановимся на семъ вычисленіи, ибо въ другомъ мѣстѣ дадимъ исправлѣнный способъ. Какъ бы ни было, можно найти симъ образомъ, что, когда радіусъ положимъ 100000000, полуокружности будетъ между 31415926536 и 31415926535. Отсюда заключаемъ, что когда радіусъ 1, то 180° полуокружности равенъ 3,14159.6535; градусъ равенъ 0.01745339242; минута равна 0.000290888258; и такъ далѣе. Мы приводимъ сіи числа здѣсь для того, что они часно могутъ быть полезны. На примѣръ, желательнѣ ли знать, какое пространство занимаетъ минута градуса на окланѣ, которымъ наблюдающъ высоты на морѣ, когда радіусъ сего оклана полагается 20 дюймовъ. По строгости сего инструмента дуга 45° представляеть 90° ; и такъ разстояніе

между двумя послѣдственными дѣлѣніями есть пространство занимаемое градусомъ, въ кругѣ котораго радіусъ вдвое меньше, то есть 10 дюймовъ; что ради минута на такомъ инструментахъ соотвѣтствуетъ только пространству, которое бы она занимала на окружности имѣющей радіусъ въ 10 дюймовъ или 120 линій. Умножимъ 120 на 0,00029 величину минуты, и взявъ только пять первыхъ знаковъ, будемъ имѣть 0,03480 или 0,0348, т. е. $\frac{348}{10000}$ линій; или около $\frac{1}{29}$ линій. Отсюда явствуетъ, что псалъя отвѣчая за минуту, наблюдая симъ инструментомъ. Мы будемъ имѣть случай говорить о семъ въ другомъ мѣстѣ.

О рѣшеніи прямоугольныхъ треугольниковъ.

294. Мы выше сего сказали (267), что для вычисленія или рѣшенія треугольника, надлежитъ знать три изъ шести вещей, которыми составляютъ оный, и что между тремя извѣстными частями, должна быть по крайней мѣрѣ одна сторона. Понеже прямой уголъ есть извѣстный уголъ, то довольно въ прямоугольномъ треугольникѣ знать двѣ вещи, кромѣ прямого угла. изъ которыхъ должна быть по крайней мѣрѣ одна сторона. Примѣтимъ еще, что послѣдую два острые угла прямоугольнаго треугольника равны купно одному прямому углу, то когда одинъ изъ нихъ извѣстенъ, извѣстенъ и другой.

Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ заключается чепыре случая: или двѣ извѣстныя вещи, суть одинъ изъ двухъ острыхъ угловъ, и одна сторона около прямого угла; или одинъ острый уголъ и гипотенуза; или одна сторона

около прямого угла и гипотенузы; или наконецъ двѣ стороны около прямого угла. Сія четыре случая всегда найдутъ свое рѣшеніе въ одной изъ двухъ слѣдующихъ пропорцій.

295. 1 я. Радиусъ таблицъ, содержи́тся къ синусу одного изъ острыхъ угловъ, такъ какъ гипотенуза, къ сторонамъ прилежащей сему углу.

296. 2 я. Радиусъ таблицъ, содержи́тся къ тангенсу одного изъ острыхъ угловъ, такъ какъ сторона около прямого угла, прилежащая сему углу, къ сторонамъ ему пришивулежащей.

Для доказательства первой изъ сихъ двухъ фиг. 144. пропорцій должно только представить, что въ прямоугольномъ треугольникѣ $свд$, $св$ часть гипотенузы есть радиусъ таблицъ; потомъ проведя дугу $ав$, перпендикуляръ $ар$ будетъ синусъ угла $асв$ или $дсе$; и такъ, понеже $ар$ и $де$ параллельны, будетъ въ подобныхъ треугольникахъ $сар$ и $сде$, $са:ар::сд:де$, то есть $р: син. дсе::сд:де$, что и составляетъ первую пропорцію.

Такимъ же образомъ докажется, что $р: син. дсе::сд:се$.

Что принадлежитъ до второй пропорціи, фиг. 149. должно представить въ прямоугольномъ треугольникѣ $сеф$, что часть $са$ стороны $се$, есть радиусъ таблицъ; тогда написавъ дугу $ав$, перпендикуляръ $ад$ вставленной изъ точки $а$ на $ас$, будетъ тангенсъ угла $с$ или $фсе$; и такъ въ подобныхъ треугольникахъ $сад$, $сеф$, будетъ $са:ад::се:еф$, то есть $р: тан. фсе::се:еф$, что составляетъ вторую изъ двухъ упомянутыхъ пропорцій.

Подобно докажется, что $р: тан. сфв::еф:ес$.

297. Въ слѣдующихъ приложеніяхъ мы всег-
да будемъ употреблять логарисмы синусовъ,
тангенсовъ и проч. вмѣсто самыхъ синусовъ,
тангенсовъ и проч. и чтобъ приучить начинаю-
щихъ къ употребленію ариѳметическихъ допол-
неній, мы употребимъ оныя во всѣхъ вычисле-
ніяхъ, выключая тѣ случаи, въ которыхъ
логарисмъ вычитаемый есть логарисмъ радиуса,
который вычитается легко, ибо характеристика
его 10. Но прежде нежели приступимъ къ вы-
численію треугольниковъ, дадимъ здѣсь краткое
понятіе о ариѳметическихъ дополненіяхъ, и
покажемъ ихъ употребленіе.

Ариѳметическое дополненіе какого либо
числа берется, вычитая изъ 9 или каждую цифру
сего числа, выключая послѣднюю на правой
рукѣ, которая вычитается изъ десяти. И такъ
арифметическое дополненіе какого нибудь числа
можеть быть взято глядя только на его
цифры.

Ариѳметическія дополненія служатъ къ
обращенію вычитаній въ сложенія. И такъ
если отъ 78549 я желаю отнять 65647, то
могу вмѣсто сего дѣйствія сложить 78549 съ
34353, что есть ариѳметическое дополненіе
числа 65647; потомъ останется только отъ
суммы на первомъ мѣстѣ съ лѣвой руки от-
нять единицу; а ежели бы приложены были два
арифметическія дополненія, должно бы отнять
двѣ единицы, и такъ далѣе. Въ семъ случаѣ
сумма будетъ 112902, отъ которой отнявъ
единицу на первомъ мѣстѣ остается 12902;
сей остатокъ есть точно тотъ же, который
произойдетъ, если изъ 78549 вычесть 65647
по обыкновенному правилу.

Причину сего удобно видѣть можно замѣтя,
что ариѳметическое дополненіе числа 65647

не что иное есть, какъ 100000 безъ 65647; и такъ прилагая арифметическое дополненіе прилагается 100000 и вычитается 65647; почему выводъ содержитъ 100000 лишку, то есть первая его цифра единицу больше.

И понеже (Ариф. 232), дабы помощію логарифмъ сдѣлать тройное правило, должно сложить логарифмы двухъ среднихъ, и вычитать логарифмъ перваго члена; можно по силѣ предъидущаго замѣчанія, взять сумму логарифмовъ двухъ среднихъ и арифметическаго дополненія логарифма перваго члена; и потомъ первую цифру съ лѣвой руки того, что выдѣлѣтъ, уменьшать единицею.

Обратимся теперь къ приложенію двухъ доказанныхъ пропорцій къ чистыремъ случаямъ, о которыхъ мы сказали.

Примѣръ 1. Положимъ, что надобно опредѣлить высоту а с какого либо зданія, мѣрами взятыми на землѣ.

фиг. 150. Должно отойти отъ сего зданія на разстояніе с в такое, чтобъ уголъ заключающійся между двумя линіями мысленно проведенными отъ точки в къ основанію и къ вершинѣ зданія, не былъ ни весьма острый, ниже весьма близкій къ 90°. Избравъ разстояніе с в, должно утвердить въ точкѣ в ножку графомистра, и установить сей инструментъ такъ, чтобъ плоскость его была вертикальна и направлена къ оси а с башни, а неподвижный діаметръ не былъ бы горизонталенъ; что можно сдѣлать помощію малой тяжести повѣшенной на нить привѣшенную къ центру. Сія нить должна тогда касаться край инструмента и соотвѣтствовать 90°. Потомъ движимый діаметръ должно двигать, доколѣ сквозь мѣшени его

будетъ видна а вершина зданія; тогда должно смощрѣшь на инструментахъ число градусовъ угла \angle в е г, которос есть поже, что и угла а в в прошивулежащаго ему накрестъ.

Положивъ сіе, посланку а с высота зданія перпендикулярна къ горизонту, будетъ она перпендикулярна и къ в е; чего ради есть прямоугольный треугольникъ а в е, въ которомъ, сверхъ прямого угла, извѣсны стороны в е равная измѣренней с в, и уголъ а в в; а ищется а в; и такъ видно, что при извѣстныхъ вещахъ, и искомая суть часты пропорціи (486); почему, дабы найти а в, должно соснавити сию пропорцію: $r : \text{тан. а в в} :: в е : а в$. Положимъ на примѣръ, что разстояніе с в или в е найдено 132 фуша, а уголъ а в в $48^{\circ} 54'$. будетъ $r : \text{тан. } 48^{\circ} 54' :: 132 \text{ ф} : а в$; и такъ взявъ въ таблицахъ величину тангенса $48^{\circ} 54'$, умножа его на 132, и раздѣля потомъ на радиусъ взятый въ таблицахъ, найдется число фушъ въ а в, къ которой приложатъ высоту инструмента, получимъ искомую высоту а с.

Но много сократится вычисленіе, употребя вмѣсто сихъ чиселъ логарифмы ихъ; ибо тогда должно только (Арм. 232) сложить логарифмы второго и третьяго чиселъ, и вычесть логарифмъ перваго; чего ради вычисленіе произойдетъ слѣдующимъ образомъ:

Логар. тан. $48^{\circ} 54'$	-	-	-	10. 0593064
Логар. 132	-	-	-	2. 1205739
Сумма	-	-	-	12. 1798803
Логар. r .	-	-	-	10. 0000000

Остатокъ или логар. а в - - - 2. 1798803, который сосчитывается въ таблицахъ 151. 32 съ погрѣшностію раздѣ на одну сотую. И такъ а в есть 151 фушъ и 32 сотыхъ, или 151 фушъ 3 дюйма, 10 линій.

Замѣшивъ мнмоходомъ, что, послѣнку логариемъ радѣуса имѣетъ характеристику 10, и нули имѣетъ другихъ его цифръ, можно, когда надобно сложить оный или вычесть, не писать его; но тодько прибавить или убавить единицу отъ десятиковъ характеристики логариема, съ которымъ сложить, или изъ котораго вычесть его, должно.

фиг. 151. Примѣръ II. Отъ извѣстной точки А перешли 32 мили по линѣ АВ параллельной ГГ, которая означаетъ нордъ-нордъ-остъ: спрашивается, сколько подались къ осту, и сколько къ северу.

Должно мысленно провести чрезъ точки А и в двѣ линѣ АС и ВС параллельныя, первую линѣи норда и зюйда NS, а вторую линѣи оста и воста OW. Понеже сѣи линѣи составляютъ прямой уголъ, то треугольникъ АСВ будетъ прямоугольный въ точкѣ С; извѣстна въ семъ треугольникѣ сторона АВ, равная 32 милямъ, и уголъ САВ, который ради параллельныхъ прямыхъ равенъ углу NОГ содержащему (ибо NG означаетъ нордъ-нордъ-остъ) 22° , $30'$ или четверть 90° .

И такъ ВС найдется изъ сѣи пропорціи (295) $R : \sin. 22^{\circ} 30' :: 32 \text{ м} : \text{BC}$. А чтобы найти АС, примѣнимъ, что уголъ ВСА есть дополнение угла А; чего ради возьмемъ сѣю пропорцію (295), $R : \sin. 67^{\circ} 30' :: 32 \text{ мили} : \text{AC}$.

Сѣи двѣ пропорціи должно вычислять по логариемамъ слѣдующимъ образомъ:

логар. син. $22^{\circ} 30'$	-	-	-	-	-	9. 5828397
логар. 32	-	-	-	-	-	1. 5051500
сумма	-	-	-	-	-	11. 0879897
логар. R.	-	-	-	-	-	1.,
остатокъ или логар. BC	-	-	-	-	-	1, 0879897,

который соотвѣтствуетъ 12. 25 съ погрѣшностью развѣ на одну сотую.

логар. син. $67^{\circ} 30'$	-	-	-	-	9. 9656153
логар. 32.	-	-	-	-	1. 5051500
сумма	-	-	-	-	11, 4707653
логар. R	-	-	-	-	1.,

остатокъ или логар. а с - - 1. 4707653,
который соотнобществуеъ 29, 56 съ погрѣшно-
стию развѣ на одну сотую.

И такъ подались на 12 миль и 25 сотыхъ
или $\frac{1}{4}$ къ осну, и на 29 миль и 56 сотыхъ къ
норду.

Число пройденныхъ миль по обѣимъ симъ
направленіямъ, служивъ къ опредѣленію мѣста
в на поверхности моря, гдѣ находится корабль,
перешедъ а в; но число миль пройденныхъ къ
осну пребудетъ поправки, о которой здѣсь гово-
рить несмѣстно; ибо мы здѣсь разсуждаемъ
только о первыхъ употребленіяхъ Тригоно-
метрии.

Примѣръ III. Перешли 42 мили по линіи
а в, которой положеніе неизвѣстно; знаемъ
только, что подались на 35 миль къ норду:
спрашивается, какое было направленіе пути
а в, то есть по какому румбу слѣдовали.

Въ семъ случаѣ извѣстны стороны а с около
прямаго угла, и ипошенуза; требуется найти
уголъ с а в. Понемѣ два угла а и в составляютъ
купию прямой уголъ, то узнаемъ уголъ а, если-
ли опредѣлимъ уголъ в. А дабы найти сей уголъ,
должно послать пропорцію (295) $R : \sin. в :: а в : а с$. то есть, $R : \sin. в :: 42 : 35$; или лучше, на-
писавъ второе содержаніе на мѣсто перваго,
 $42 : 35 :: R : \sin. в$.

Вычисляя по логарифмамъ имѣемъ:

логар. 35.	-	-	-	-	1. 5440680
логар. радиуса	-	-	-	-	1.,
арифм. дополненіе лог. 42	-	-	-	-	8. 3767507.

сумма или логар. син. угла в $X 9, 9208187,$

который въ таблицахъ соотвѣствуетъ 56° , $17'$. И такъ уголъ а, или направленіе румба есть 33° , $33'$.

Примѣръ IV. Перешли по линіи а в, которой положеніе и величина неизвѣстны: извѣстно только, что подались на 15 миль къ осипу и на 35 миль къ норду; вопрошается о направленіи и длинѣ пути.

И такъ даны здѣсь двѣ стороны а с и в с около прямого угла; пребудуща углы и ипопеченуза. Дабы найти уголъ а, должно сопоставить сію пропорцію (296) а с : в с :: к : тан. а. ш. с. $35 : 15 :: к : \text{тан. а.}$

Вычисляя по логарифмамъ;

логар. 15	-	-	-	-	-	1.	1760913
логар. к	-	-	-	-	-	1.
арнем. дополненіе логар. 35	-	-	-	-	-	8.	4559320
сумма или логар. тан. а	-	-	-	-	-	19.	6320233;

который въ таблицѣ соотвѣствуетъ 23° , $12'$.

Когда уже опредѣленъ уголъ а, то для сысканія а в можно поступить такъ же какъ и въ III. примѣрѣ; но не нужно вычислять уголъ а, предложеніе доказанное (164 и 166) для сего доваѣснѣ. И такъ взявъ квадратъ 15, который есть 225, и сложивъ его съ 1225, квадратомъ 35, найдешь 1450 для квадрата изъ а в; изваскши же квадратный корень будешь имѣть 38, 08 величину а в, съ погрѣшностію развѣ на одну сотую.

Для той же причины, есѣли даны ипопеченуза а в и одна изъ сторонъ а с около прямого угла, а пребудется сыскать другую сторону в с, имѣнѣ нужды вычислять уголъ а; надлежитъ только вычесъ (166) квадратъ извѣстной стороны а с изъ квадрата ипопеченузы а в; квадратный корень изъ остатка покажетъ величину стороны в с.

Подобнымъ рѣшеніемъ прямоугольныхъ треугольниковъ можно опредѣлить, чего недостаетъ, чтобъ лучъ $а д$, по которому видимъ горизонтъ моря, когда зритель возвышенъ на извѣстное количество $а в$, выше точки в его поверхности, былъ параллеленъ поверхности моря.

Поневже лучъ зрѣнія $а д$ есть въ семъ случаѣ прикасательная прямая, то, ежели мысленно проведенъ будетъ радіусъ $с в$, уголъ $в$ будетъ прямой (48); извѣстенъ же радіусъ $с в$ земли, который содержитъ 19611500 футовъ; и еслии къ радіусу $с в$ 19611500 футовъ приложена будетъ высота $а в$, то сыщется сторона $а с$. И такъ извѣстны будутъ двѣ вещи свѣрхъ прямого угла, почему можно будетъ вычислить уголъ $с а д$, коего разность $в а о$ съ прямымъ угломъ будетъ пониженіе луча $а д$ ниже луча $а о$, параллельнаго поверхности моря при точкѣ в.

Еслии въ томъ же треугольникѣ $а в с$ вычислена будетъ сторона $а д$, то сыщется дальнѣйшее разстояніе, на которое зрѣніе можетъ простирашся, когда глазъ находится на высотѣ $а в$; но какъ обыкновенныя таблицы не могутъ показать угла $с а д$ и стороны $а д$ съ довольною точностію, когда $а в$ есть весьма малое количество въ разсужденіи радіуса земли; то воишь какимъ образомъ можно дополнить сей недостапковъ:

Вообразимъ, что $а с$ продолжена до точки $е$ на окружности; и такъ $а е$ будетъ сѣкущая, а $а д$ касательная, чего ради (129) будетъ $а е : а д :: а в : а в$. И шакъ для сысканія $а д$ должно взять (Арифм. 178) среднюю пропорціональную между $а е$ и $а в$.

На примѣрѣ, сѣмъ бы глазѣ возвышенъ
смаѣ отъ поверхности моря на 20 футѣ, по
ав была бы 20 футѣ, а ае двукратная 19611500
футѣ вмѣстѣ съ 20, то есть 39223020 футѣ;
квадратъ изъ ад былъ бы 39223020×20 или
784460400; слѣдовательно (Арием. 178 и 139)
ад была бы 28008 футѣ, то есть что глазѣ
возвышенный на 20 футѣ отъ поверхности
морской можетъ видѣть на 28008 футѣ или на
одну лигу и $\frac{2}{3}$ вокругъ.

Теперь, дабы узнать на сколько лучъ зрѣ-
нія ад понизился въ разсужденіи горизонталь-
наго ао, примѣтимъ, что, послѣку ав крайне
мала, линія ад непримѣтно разсѣиваетъ отъ
дуги вв; и такъ дуга вв есть 28008 футѣ. Но
какъ радіусъ равенъ 19611500 футѣ, то легко
найдется (152), что окружность равна 123222688;
и слѣдовательно (153) сыскано будетъ число
градусовъ дуги вв по сей пропорціи: 123222688:
28008 :: 360° къ четвертому члену, который
будетъ 0°. 4'. 54"; чего ради уголъ асд, а посему
и дао есть 0°. 4'. 54", когда ав 20 футѣ.

О рѣшеніи косоугольныхъ треуголь- никовъ.

298. Слово косоугольные треугольники
употребляется для означенія вообще треуголь-
никовъ не имѣющихъ прямого угла.

299. Во всякомъ прямолинейномъ треу-
гольникѣ, синусъ одного угла, содержишся
къ сторонѣ противуположающей сему углу,
такъ какъ синусъ всякаго другаго угла по-
гожъ треугольника, къ сторонѣ ему проти-
вуположающей.

фиг. 153. Ибо если представить кругъ описанный
около треугольника авс, и проведя радіусы да,

дв, вс, описать радіусомъ дв, равнымъ радіусу
таблицъ, кругъ аbc; наконецъ провести хорды
аб, bc, ac, соединяющія шочки сѣченія а, в, с;
по удобно можно видѣть, что треугольникъ
abc подобенъ треугольнику авс; ибо линѣи аа,
дв будучи равны, суть пропорціональны линѣ-
ямъ аа, дв; и такъ аб (105) параллельна ав.
Подобно докажется, что bc параллельна вс, и ac
параллельна ас; слѣдовательно (111) ав::аб::
вс:bc; или ав: $\frac{1}{2}$ ав::вс: $\frac{1}{2}$ вс; но половина хор-
ды аб есть (270) синусъ аі половины дуги аhb;
сѣяжъ половина дуги аhb есть мѣра угла асв
имѣющаго вершину свою на окружности, и рав-
наго углу асв; и такъ $\frac{1}{2}$ ав есть синусъ угла
асв. Подобно докажется, что и $\frac{1}{2}$ вс есть синусъ
угла вас; чего ради ав:син. асв::вс:син. вас.

300. Сѣя пропорція служитъ къ рѣшенію
треугольника: 1 с, когда извѣстны вѣ немъ два
угла и одна сторона; 2 с, когда извѣстны двѣ
стороны и одинъ уголъ, противулежащій кошо-
рой нибудь изъ сихъ сторонъ.

Случай 1. Ежели извѣстны уголъ в, уголъ фиг. 65.
с и сторона вс, то сыщется и уголъ а, сло-
живъ два угла в и с, и вычтя ихъ сумму изъ
180°; а что бы найти двѣ стороны ас и ав,
должно послать двѣ слѣдующія пропорціи:

$$\text{син. а : вс :: син. в : ас}$$

$$\text{син. а : вс :: син. с : ав}$$

Симъ-то образомъ можно вычисленіемъ рѣшати
вопросъ, который мы разсматривали (121). На
прим. ежели уголъ в примѣченъ 78°. 57', уголъ
с 47°. 34', а сторона вс 184 фута; то будетъ
уголъ а 53°. 29'. Остальные же двѣ стороны
найдушся по симъ двумъ пропорціямъ:

$$\text{син. 53°. 29' : 184 :: син. 78°. 57' : ас.}$$

$$\text{син. 53°. 29' : 184 :: син. 47°. 34' : ав.}$$

В 2



Дѣлая по логарифмамъ слѣдующимъ образомъ:

логар. 184	2.	2648178
логар. син. $78^{\circ} 57'$	9.	9918727
ариф. дополненіе лог. син. $53^{\circ} 29'$	0.	0949148
сумма или лог. ас	12.	3516053
логар. 184	2.	2648178
лог. син. $47^{\circ} 24'$	9.	8680934
ариф. дополненіе лог. син. $53^{\circ} 29'$	0.	0949148
сумма или логар. ав	12.	2278260

найдесть ас 224. 7 ф, а ав 169 ф.

Фиг. 141. Случай 11. Если извѣстны сторона ав, сторона вс и уголъ а, то можно опредѣлить уголъ с, вычисливъ его синусъ сею пропорціею:

$$вс : \sin. а :: ав : \sin. с.$$

Но примѣнимъ, сходственно тому, что мы сказали прежде (267), что нельзя опредѣлить угла с, развѣ извѣстно, острый или тупой онъ быть долженъ.

На примѣрѣ, да будетъ ав 68 футъ, вс 37 футъ, а уголъ а $32^{\circ} 28'$, пропорція будетъ $37 : \sin. 32^{\circ} 28' :: 68 : \sin. с.$

Найдемъ, что сей синусъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ $80^{\circ} 36'$; но какъ синусъ угла принадлежитъ также и супплементу его, то не извѣстно, $80^{\circ} 36'$, или супплементъ его $99^{\circ} 24'$ взять должно; но когда извѣстно, что уголъ искомый долженъ быть острый, то несомнѣнно въ семъ случаѣ онъ равенъ $80^{\circ} 36'$, и треугольникъ имѣетъ фигуру авс: естли же напротивъ того уголъ долженъ быть тупой, то онъ равенъ $99^{\circ} 24'$, и треугольникъ получитъ фигуру авс.

Прежде нежели покажемъ два предложенія, дѣющія рѣшенія треугольниковъ въ другихъ случаяхъ, прилично помѣстимъ здѣсь предложеніе нужное для доказательства сихъ двухъ предложеній.

мб: 301. Если известны сумма и разность
двухъ количествъ, то придавъ полураз-
ность къ полусуммѣ, будемъ имѣть большее
количество; а напрошивъ того, отнявъ
полуразность отъ полусуммы, получимъ
меньшее.

На примѣрѣ, если я знаю, что два ко-
чества купно составляютъ 57, и что разности-
ю отъ 17; то заключаю изъ сего, что сіи
два количества суть 37 и 20; приложивъ съ одной
стороны половину 17 къ половинѣ 57, а съ дру-
гой отнявъ половину 17 отъ половины 57.

Въ самомъ дѣлѣ, послѣду сумма содержитъ
большее и меньшее количество, отънявъ къ сей
суммѣ придашь разность, то произойдетъ дву-
кратное большаго; и такъ большее количество
равно половинѣ всего сего, то есть полусуммѣ
двухъ количествъ съ полуразностью ихъ.

Напрошивъ того, отънявъ отъ суммы отнять
разность, останется двукратное меньшаго; и
такъ меньшее количество равно полусуммѣ,
то есть полусуммѣ безъ полуразности.

302. Во всякомъ прямолинейномъ тре- фиг. 154.
угольникѣ авс, если отъ одного изъ угловъ и 155.
опущена будетъ перпендикулярная прямая
на противоположащую сторону, то всегда бу-
детъ сія пропорція: сторона ас, на которую,
или на продолженіе которой падаетъ пер-
пендикуляръ, содержишься къ суммѣ ав+вс
двухъ прочихъ сторонъ, такъ, какъ раз-
ность ав—вс сихъ самыхъ сторонъ, къ раз-
ности отсѣковъ ад и вс или къ суммѣ ихъ,
судя по тому, какъ перпендикуляръ падаетъ,
внутри, или вѣнъ треугольника.

Точкою в, какъ центромъ и радиусомъ вс, фиг. 154.
описи окружность снг, и продолжи сторону и 155.

ав, пока встрѣтятся съ сею окружностію на точкѣ е. И такъ ае и ас суть двѣ сѣкущія, проведенныя отъ одной точки взятой внѣ круга; чего ради въ силу того, что сказано (127), будетъ сія пропорція: $ас:ае::аг:аф$: но ае равна $ав+ве$ или $ав+вс$; аг равна $ав-вг$, или $ав-вс$; а аф (фиг. 154) равна $ад-де$ или (52) $ад-дс$; слѣдовательно $ас:ав+вс::ав-вс:ад-дс$. Въ фигурѣ 155, аф равна $ад+де$, или $ад+дс$; и такъ въ семъ случаѣ $ас:ав+вс::ав-вс:ад+дс$.

303. Посему, когда извѣстны три стороны треугольника, можно помощію сего предложенія сыскать отсѣки сдѣланные перпендикулярною прямою, проведенною отъ одного изъ угловъ на противоположную сторону. Ибо въ такомъ случаѣ извѣстна (фиг. 154) сумма ас сихъ отсѣковъ, и показанная пропорція дастъ ихъ разность; посліку три первые члена сея пропорціи извѣстны: слѣдовательно знаемъ будетъ каждый изъ отсѣковъ по (301). Въ фигурѣ 155 извѣстна разность отсѣковъ ад и сд, которая есть самая сторона ас, а пропорція опредѣляетъ величину ихъ суммъ.

304. Теперь легко можемъ рѣшить сей вопросъ: опредѣлишь углы треугольника, зная всѣ три его стороны. Должно провести перпендикуляръ отъ одного изъ угловъ; отъ чего составятся два треугольника адв и сдв. Потомъ вычислять по предъидущей пропорціи одинъ изъ отсѣковъ, на примѣръ сд; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ сдв, зная двѣ стороны вс и сд сверхъ прямого угла, удобно будетъ вычислить уголъ с по (295).

Примѣръ. Сторона ав дана 142 фуша, сторона вс 64 фуша, а сторона ас 184 фуша; требующся сыскать уголъ с,

Вычисляю разность двухъ опсѣковъ AD и BC по сей пропорціи: $184:142+64::142-64:AD-BC$, или $184:206::78:AD-BC$, которую нахожу $87,32$; и такъ (301) меньшій опсѣкъ CD равенъ половинѣ 184 безъ половины $87,32$, ш. с. равенъ $48,34$.

Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ CD вѣщу уголъ $свд$, который будучи сысканъ, покажемъ уголъ $с$. А чтобъ найти уголъ $свд$, составляю сію пропорцію: (295) $BC:CD::R:свд$. $свд$, то есть $64:48,34::R:свд$.

Дѣлая по логарифмамъ:

логар. 48,34	-	-	-	-	1, 6843066
логар. радіуса	-	-	-	-	1,
ариф. дополненіе логар. 64	-	-	-	-	8, 1938200
					<hr/>
сумма или лог. $свд$	-	-	-	-	9, 8781266,

которой соотвѣствуетъ въ таблицахъ $49^{\circ}, 03'$; слѣдовательно уголъ $с$ будетъ $40^{\circ}, 57'$.

Можно рѣшить сей случай по другому правилу, которое мы здѣсь безъ доказательства покажемъ.

Отъ полусуммы трехъ сторонъ отними каждую изъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка. Потомъ сдѣлай сію пропорцію:

Произведеніе двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ, къ произведенію двухъ остатковъ, такъ какъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса половины искомага угла. Логарифмами же вычисляй такимъ образомъ:

Къ двукратному логарифму радіуса приложи логарифмы двухъ остатковъ, и отъ всего отними сумму логарифмовъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ, остатокъ будетъ логарифмъ квадрата синуса половины искомага

угла. Возьми половину сего остатка, что будетъ (ариф. 230) логарифмъ синуса, который при-
искавъ въ таблицахъ получишь половину угла,
удвоивъ же оную получишь цѣлый искомый уголъ.

И такъ въ предложенномъ примѣрѣ я сложу
три стороны 184, 64, 142, и отъ 195 полусуммы
ихъ, отниму порознь 184 и 64; что миѣ дастъ
11 и 131 въ остаткахъ. Потомъ приложу къ
20. 0000000 двукратному логарифму радиуса, ло-
гарифмы 1. 0413927, 2. 1172713 остатковъ 11 и
131, буду имѣть 23. 1586640; отъ чего ежели
отниму сумму 4. 0709978 логарифмовъ 1. 8061800
и 2. 2648178 сторонъ 64 и 184, останется
19. 0876662, ксого половина 9. 5438331 есть
логарифмъ синуса половины угла с; а въ та-
блицахъ найду, что сія половина есть почти
20°, 28', что удвоивъ получаю 40°, 57' углу с,
какъ и выше найдено.

Упопребляя арифметическія дополненія
дѣйствіе приводится къ слѣдующему сложенію:

20. 0000000

1. 0413927

2. 1172713

8. 1938200

7. 7351822

39. 0876662. сумма.

Первую цифру уменьшивъ двумя единицами, по-
лучасъ тотъ же выводъ, что и въ предъ-
идущемъ дѣйствіи, но гораздо короче.

Сіе предложеніе служивъ къ вычисленію
разстояній, когда имѣли инструментъ для из-
мѣренія угловъ; оно даетъ средство дѣлать
вычисленіемъ то, что предписано было дѣлать
помощію линіи въ (122).

Случай, въ которомъ надобно рѣшить пре-
угольникъ имѣющій всѣ стороны извѣстныя,

часто встрѣчается въ вычисленіи треуголь-
никовъ одинъ оный другого зависящихъ.

305. Во всякомъ прямолинейномъ тре-
угольникѣ, сумма двухъ сторонъ содержи-
ся къ ихъ разности, такъ какъ тангенсъ
полусуммы двухъ угловъ противолежащихъ
симъ сторонамъ, къ тангенсу ихъ полураз-
ности.

Ибо сходственно съ тѣмъ, что доказано фиг. 156.
(299), $ав : син. с :: ас : син. в$; и такъ (97) $ав + ас : ав - ас :: син. с + син. в : син. с - син. в$. Но
(286) $син. с + син. в : син. с - син. в :: тан.$
 $\frac{с + в}{2} ; тан. \frac{с - в}{2}$; следовательно $ав + ас : ав - ас ::$
 $тан. \frac{с + в}{2} : тан. \frac{с - в}{2}$.

306. Сіе предложеніе служитъ къ разрѣшенію
треугольника, коего извѣстны двѣ стороны и
уголъ въ нихъ содержимый. Ибо, ежели на при-
мѣрѣ извѣстенъ уголъ а, то вычися его изъ
 180° , извѣстна будещъ и сумма двухъ угловъ
в и с. И такъ взявъ полусуммаго, который
произойдетъ отъ сего вычитанія, и прискавъ
тангенсъ его въ таблицахъ, получимъ съ двумя
сторонами ав и ас, кои полагаются извѣстными,
при извѣстныхъ членахъ въ доказанной пропорціи;
следовательно найдется четвертый членъ, ко-
торой покажетъ полуразность двухъ угловъ в
и с; зная же полусумму и полуразность сихъ у-
гловъ, можно найши (301) большій изъ нихъ,
прилагая полуразность къ полусуммѣ; и меньшій,
отнимая оный сѣи оную. Наконецъ сыскавъ сѣи
два угла, удобно будещъ найши третью сторону
по вышепоказанному предложенію (299).

Примѣръ. Да будетъ сторона ав 142 фута,
сторона ас 120, и уголъ а 48° , спрашивается два
угла с и в, и сторона вс.

Вычтя 48° изъ 180° ; останется 132° сум-
мѣ двухъ угловъ с и в; слѣдовательно 66° полу-
суммѣ ихъ. Пошомъ $142 + 120 : 142 - 120 :: \text{тан.}$
 $66 :: \text{тан.} \frac{c-b}{2}$ или $262 : 22 :: \text{тан.} 66^\circ : \text{тан.} \frac{c-b}{2}$.

Дѣлая по логарифмамъ:

логар. тан. 66°	-	-	-	-	-	10, 3514169
логар. 22	-	-	-	-	-	1, 3424227
арифм. дополненіе 262	-	-	-	-	-	7, 5816987
						<hr/>
сумма или логар. полуразности	-	-	-	-	-	19, 2755383,

которой соотвѣтствуетъ въ таблицѣ 10° , $41'$.

Приложя сію полуразность къ полусуммѣ 66° , и отнявъ отъ сей оную, буду имѣть, какъ явствуетъ:

$66^\circ, 00''$	$66^\circ, 00''$
<u>10, 41</u>	<u>10, 41</u>

уголъ с = $76^\circ, 41'$; уголъ в = $55^\circ, 19'$.

Наконецъ для сысканія стороны вс, слѣваю сію пропорцію: син. с : ав :: син. а : вс, то есть син. $76^\circ, 41' : 142$ ф :: син. $48^\circ : вс$.

Дѣлай какъ въ прежнихъ примѣрахъ, най-
дется вс равна 108, 4 ф.

307. Сін-по суть способы употребляемые для рѣшенія треугольниковъ: теперь прилагаются нѣкоторые примѣры, какъ они могутъ быть приложены къ фигурамъ имѣющимъ больше нежели три стороны.

308. Положимъ, что с и д суть два пред-
мет. 157. мѣта, къ которымъ нельзя подойти, но нуж-
но знать ихъ разстояніе.

Надлежитъ вымѣрять основаніе ав, шакое, чтобъ съ окончечностей его были видны оба пред-
мѣты с и д; пошомъ должно измѣрить при шоч-
кѣ а углы сав, дав, которые составляютъ съ ав линіи ас и ад мысленно проведенныя отъ шочки а къ двумъ предметамъ с и д; также

должно измѣрить при точкѣ в углы сва и два. Предположивъ сіе, въ преугольникѣ сва извѣстны будущіе углы сав, сва и сторона ав; по сему найдемся сторона ас (300). Также въ преугольникѣ адв извѣстны будущіе два угла дав, два и сторона ав; чего ради по тѣмъ же началамъ удобно будетъ вычислить сторону ад. Потомъ проведя мысленно линію сд, составится преугольникъ сав, въ которомъ извѣстны двѣ вычисленныя стороны ас, ад, и уголъ сав содержимый въ оныхъ; ибо сей уголъ есть разность двухъ угловъ сав, дав, кои вымѣрены; по сему найдемся сторона сд (306).

309. Можно также симъ самымъ способомъ узнать, какое есть направленіе прямой сд, хотя бы и не можно было подойти къ сей линіи. Ибо въ томъ же преугольникѣ сав можно вычислить уголъ асд, который дѣлаютъ прямая сд и ас; естли же чрезъ точку с проведешь мысленно линію сз параллельную ав, то уголъ асз будетъ супплементъ угла сав (40); слѣдовательно взявъ разность извѣстнаго угла асз и вычисленнаго угла асд, извѣстенъ будетъ уголъ дсз, которой составляетъ прямая сд съ зс или съ ея параллельною ав; и по сему весьма легко узнать по компасу положеніе прямой ав, то и направленіе прямой сд будетъ извѣстно.

310. Говоря о линіяхъ (3) мы сказали, что покажемъ способъ опредѣлять точки той же прямой линіи, когда что нибудь препятствуетъ отъ одной оконечности оной видѣть другую. Вотъ какъ должно приступить къ сему:

Видѣ линіи ав, о которой разсуждается, фиг. 158. избравъ такую точку с, отъ которой бы можно было видѣть оба концы а и в, должно вымѣрить разстоянія ас и св, или непосредственно, или составляя преугольники имѣющіе спо-

ронами сїи линїи, и которые бы можно было вычислить подобно, какъ въ предвѣдущемъ примѣрѣ (308). Тогда двѣ стороны ас и св треугольника асв и уголъ асв, который въ нихъ содержи́тся, будутъ извѣстны; и посему найдется (306) уголъ вас. Сдѣлавъ сіе, надобно поспавить по какому либо направленію сд и ѣсколько колышковъ, и измѣривъ уголъ асд, знаемъ будутъ въ треугольникѣ асд, сторона ас и два угла а и асд; чего ради найдется (300) сторона сд. Послѣ сего надлежитъ продолжать спавить колышки въ направленіи сд, доколѣ пройденна будетъ длина равная вычисленной линїи; точка в, гдѣ остановится, будетъ впрямъ съ точками а и в.

311. Если бы не возможно было сыскать точку с, отъ которой бы могли быть видимы вдругъ обѣ точки а и в, то можно прибѣгнуть къ слѣдующему способу:

фиг. 159.

Надлежитъ сыскать точку с, отъ которой бы можно было видѣть точку в; и другую точку е, отъ которой бы видимы были точки а и с; потомъ измѣривъ или опредѣливъ какимънибудь способомъ почерпнувшимъ изъ предвѣдущихъ началъ, разстоянія ае, ес и св, надлежитъ измѣрить при точкѣ е уголъ аес, а при с уголъ есв: тогда въ треугольникѣ аес, зная двѣ стороны ае, ес и содержи́мый въ нихъ уголъ аес, должно вычислить (306) сторону ас и уголъ еса, который опираѣтъ отъ измѣреннаго угла есв, найдется уголъ асв. И какъ уже вычислена ас и измѣрена св, то выходящій предвѣдущій случай, такъ какъ бы точки а и в были видимы отъ точки с; чего ради надлежитъ окончить по вышеписанному.

фиг. 160.

312. Если требуется измѣрить высоту, къ основанію которой не можно приближиться

какъ на примѣрѣ высоту какой нибудь горы; то должно измѣрить на землѣ основаніе FG , отъ концовъ котораго можно бы было видѣть точку A , которой высота ищется; потомъ надлежитъ вымѣрить графометромъ, коего высоту представляющъ прямые BF и CG , углы ABC , ACB составляемые линіями BA , CA , проведенными мысленно отъ двухъ точекъ B и C къ точкѣ A , съ основаніемъ BC ; наконецъ въ одномъ изъ стояній, на примѣрѣ въ C , должно расположить сей инструментъ подобно какъ въ примѣрѣ опнописательномъ до фигуры 150, и измѣрить уголъ ACB , показующій наклоненіе линіи AC къ горизонту: тогда зная въ треугольникѣ ABC два угла ABC , ACB и сторону BC , не трудно будетъ вычислить (300) сторону AC ; а въ треугольникѣ ABC , въ которомъ теперь извѣстны сторона AC , измѣренной уголъ ACB , и уголъ прямой, ибо AD есть высота перпендикулярная, легко найдется AD , которая покажетъ высоту точки A надъ точкою C . Еслии желательнѣе потомъ знать высоту точки A надъ точкою B , и надъ всякою другою точкою, останется только нивелировать, то есть искать разности высоты между точками C и B , о чемъ мы скоро говорить будемъ.

313. Мы сказали (153), что для вычисленія фиг. 74. площади какого нибудь сегмента $AZBV$, въ космѣ число градусовъ дуги ABV и радіусъ извѣстны, надлежитъ вычислить площадь треугольника ABV , дабы вычесть оную изъ площади сектора ABV ; теперь сіе легко сдѣлать можемъ; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ ABV , извѣстны сверхъ прямого угла, сторона AB и уголъ ABV половина угла ABV , измѣряемаго дугою ABV ; посему удобно найдется (295) AV высота треугольника, и BV половина основанія.

Явствуетъ еще изъ предвѣдущаго, способъ составляющъ уголъ или дугу опредѣленнаго числа градусовъ и минутъ.

фиг. 145. Проведемъ прямую св произвольной длины, которую возьмемъ за сторону угла, и написавъ изъ центра с дугу вва, проведемъ радиусъ са и хорду ва; еслили вообразимъ еще перпендикуляръ сг и вымѣряемъ св, то въ прямоугольномъ треугольникѣ сгв будущъ извѣстны прямой уголъ, сторона вс, и уголъ всг половина того угла, о которомъ разсуждается; по сему можно будетъ вычислить вг, которой двукратная будетъ величина хорды ав. И такъ взявъ отъ вершинѣ циркуля равное сей двукратной, изъ точки в, какъ изъ центра, замѣтъ точку д на дугѣ вва, и проведи са, получишь требуемый уголъ.

Мы могли бы показать здѣсь безчисленное множество другихъ употребленій Тригонометрии; но довольно и сихъ для наставленія; впрочемъ мы будемъ имѣть довольно случаевъ въ продолженіи требоваши пособій отъ сей части.

О нивелированіи или уравненіи.

314. Многія наблюденія доказываютъ, что поверхность земли не есть плоская, каковою она кажется; но кривая и даже сферическая, или почти сферическая. Когда корабль приближается къ какому нибудь берегу, то первые предметы представляющіеся зрѣнію его, суть предметы самые возвышенныя. Но еслили бы поверхность земли была плоская, то въ то же время, въ которое открывается башня в, видима бы была и вся прилежащая земля авс, которой не видно; позже в а с поверхность земли понижается болѣе и болѣе въ разсужденіи въ горизонтальной

фиг. 161.

линіи корабля. И такъ двѣ точки d и v могутъ представитъся на той же горизонтальной линіи dv , хотя онѣ и неравно отстоятъ отъ поверхности, и слѣдовательно отъ центра земли t . Горизонтальною линіею называется линія проведенная на плоскости касающей поверхность моря, или параллельно такъ называемой горизонтальной плоскости. Вертикальная же линія есть прямая перпендикулярная къ горизонтальной плоскости.

Нивелированіе называется дѣйствіе опредѣлять, чѣмъ далѣе одинъ предмѣтъ другого отстоятъ отъ центра земли.

315. Когда одинъ изъ сихъ предмѣтовъ видимый отъ другого представляется въ горизонтальной линіи отъ сего послѣдняго исходящей, тогда они различно удалены отъ центра земли. Дабы узнать сію разность, примѣтимъ, что фиг. 162. разстояніе dj , въ которомъ можно видѣть какой нибудь земный предметъ, или по крайней мѣрѣ разстояніе, въ которомъ нивелируютъ, есть всегда столь малое, что будучи вымѣрено на поверхности земли, можетъ почтѣться равнымъ пангенсу dv ; но сказано выше (129), что пангенсъ dv есть средняя пропорціональная между всякою сѣкущею проведенною отъ точки v , и внѣшнюю частію vj сей сѣкущей; а ради малости дуги dj можно почтѣть сѣкущую, проходящую чрезъ точку v и центръ t , равною діаметру, то есть прямой двукратной прямая jt или dt ; чего ради vj будетъ четвертый членъ сей пропорціи: $2 dt : dj :: dj : vj$.

Положимъ на примѣръ, что dj вымѣренная на поверхности земли содержишь 1000 шаговъ или 6000 футовъ. Понеже радіусъ земли имѣетъ 19611500 футовъ, то найдемся vj по сей пропорціи: $39223000 : 6000 :: 6000 : vj$; вычисляя полу-

числь 0,91783 ф, что равно 11 д. о л. 2 п; то есть, между двумя предметами в и в, на тысячу шаговъ отстоящими, и которые находясь въ тойже горизонтальной линіи, разность в разстояній ихъ отъ центра земли, есть 11 д. о л. 2 п.

316. Вычисливъ одну разность, какъ в j, можно гораздо легче вычислять разности соотвѣтствующія меньшему разстоянію, потому что разности в j, в i суть почти параллельны и равны линіямъ в q, в q, которые (170) содержащя между собою, какъ квадраты хордъ или дугъ в j, в i; ибо здѣсь x ради и дуги могутъ быть взяты одна за другую. И такъ, число найши в i разность соотвѣтствующую 5000 фунамъ, я сдѣлаю сію пропорцію: $6000^2 : 5000^2 :: 0,91783 : в i$, которая по вычисленію найдется 0,63738 или 7 д. 7 л. $9\frac{2}{3}$ п.

фиг. 163. 317. Предложивъ сія понятія, дабы узнать разность разстояній двухъ точекъ в и а отъ центра земли, которая не находясь на одной горизонтальной линіи проведенной чрезъ одну которую нибудь изъ оныхъ, должно употребить угольномъ инструмѣнть, и расположивъ его, какъ сказано въ примѣрѣ относительномъ до фиг. 150, измѣривъ уголъ всв; измѣривъ же и разстояніе св или с j помощью дѣли, протягая оную горизонтально, и въ разные прѣслы по поверхности земли авв, можно будеть въ шреугольникѣ свв, принимая его за прямоугольный въ в, вычисливъ вв, къ коей должно приложить са высоту инструмента и разность уравненія в j, вычисленную сходственно съ шѣмъ, что сказано (315 и 316).

Но какъ сей образъ дѣйствія предполагаетъ великую точность въ измѣреніи угла всв, и весьма вѣрный инструмѣнть; то обыкновенно

предпочинается другой продолжительнѣйшій способъ, который мы намѣрены теперь предложить.

318. Употребляютъ для сего инструментъ, какой представляешь фигура 164, и которой называется ватерпасъ или уровень. Главная его часть есть пустая трубка изъ жести, или изъ другого какого либо металла сдѣланная и загнутая въ концахъ а и в. Въ выдавшіяся двѣ равныя части а с и в д, вставляющіе другія двѣ трубки стеклянныя ж к, склеенныя съ частями а с и в д. Весь каналъ наполняютъ водою, доколѣ она взойдетъ въ сѣи двѣ стеклянныя трубки; когда вода поднимается въ каждой изъ оныхъ до равной высоты, то сѣе доказываетъ, что линія проходящая по поверхности воды возвысившейся въ обѣихъ сихъ трубкахъ, есть линія горизонтальная, и тогда употребляютъ сей инструментъ слѣдующимъ образомъ:

Производятъ многія споманія, на примѣръ въ точкахъ в, с, в; утвердивъ въ двухъ точкахъ фиг. 165 а и н два кола перпендикулярно, наблюдаешь находящійся въ в смотришь по ватерпасу попеременно на каждой изъ оныхъ, и замѣчаешь двѣ точки е и г соотвѣтствующія горизонтальной линіи. Потомъ поставя другой колъ въ какойнибудь точкѣ р, по другую сторону точки с, замѣчаешь подобнымъ образомъ двѣ точки г и н. Измѣряешь при каждомъ споманіи высоты а е, а г, г н и проч. и исправя ихъ уравненіями (316) приличествующими разстояніямъ к е, к г, л г и проч. безъ дальнѣйшей точности измѣренными, сласашъ сѣи высоты, и находишь разность уравненія между точками а и в.

Еслибы во время сихъ дѣйствій не всегда поднимались въ верхъ, явствовало, что въ вѣсто

сложенія, надлежало бы вычислять количества, на которыя спускались.

Посему мы не имѣемъ зѣбсь предложитъ подробнѣйшаго изслѣдованія инвентаризованія, но не будемъ останавливаться для показанія другихъ средствъ и инструментовъ, которые для сего употребляются. Можно чинить о семъ предлогъ въ переведенномъ на русской языкъ математическомъ курсѣ Г. Белидора, и въ Молодомъ Геометрѣ Г. Кошельникова.



С
О
ча
ш
це
су
ш
А
пр
им
ко
по
ли
нѣ
ГО
пи
из
жи
ка
ко
и
ко
по
ген
въ
ше
ГА
МЫ
АГ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

О предварительныя поняшїя.

319. Сферическій треугольникъ есть часть поверхности шара, включенная между тремя дугами круга, имѣющими общій свой центръ, центръ шара; и посему сїи три дуги, суть дуги великаго круга тогоже самаго шара.

Ежели отъ трехъ угловъ A, F, G сферическаго треугольника AFG , проведемъ будущъ при радиуса фиг. 166. AC, FC, GC къ центру шара C ; то представится пространство $CAFG$, какъ треугольная пирамида, имѣющая вершину свою C въ центрѣ шара, и которой вогнутое основаніе AFG есть часть поверхности сего шара. Дуги AF, FG, AG , криволинейныя стороны основанія, суть взаимныя сѣченія поверхности шара съ плоскостями ACF, FCG, GCA , составляющими боковую поверхность сего пирамиды.

Уголъ A содержимый въ двухъ дугахъ AF, AG , измѣряется прямолинейнымъ угломъ $JAК$, содержащимъ въ тангенсахъ AJ, AK сихъ двухъ дугъ; каждой изъ сихъ тангенсовъ находится на плоскости той дуги, къ которой онъ принадлежитъ, и оба они перпендикулярны радиусу CA (48), которой есть сѣченіе двухъ плоскостей ACF, ACG ; по сему (191) уголъ содержимый въ двухъ тангенсахъ, есть тотъ же, что и уголъ содержимый въ плоскостяхъ двухъ дугъ ACF, ACG ; слѣдовательно

320. 1 с. Какой-либо сферической уголъ $FAГ$ не что иное есть, какъ уголъ содержимый въ плоскостяхъ двухъ его сторонъ AF, AG .

321. 2е. Углы составляемые дугами великаго круга, встрѣчающимися на поверхности шара, имѣютъ тѣже свойства, что и плоскіе углы; то есть свойства показанныя въ (192, 193 и 194).

322. По сему двѣ стороны сферическаго треугольника суть между собою перпендикулярны, когда плоскости сихъ дугъ взаимно перпендикулярны.

Если представимъ, что двѣ плоскости $асг$, $асф$, продолжены безпредѣльно во всѣ стороны; то явно, что сѣченіе каждой съ поверхностью шара, будетъ великій кругъ; и что сіи два великіе круга разсѣкутся взаимно на двѣ равныя части въ точкахъ $а$ и $с$, находящихся на продолженномъ общемъ сѣченіи $ас$; ибо двѣ плоскости проходящія чрезъ центръ, имѣютъ общее сѣченіе діаметръ шара.

323. По семуединокрайнія двѣ стороны $ас$, $ас$ сферическаго треугольника не могутъ въ иной точкѣ встрѣниться какъ на разстояніи $ас$, или $ас$ равномъ 180° . щинная ошъ начала ихъ соединенія.

324. Если взяты будутъ двѣ дуги $ав$, $ае$ каждая въ 90° , и если чрезъ двѣ точки $в$ и $е$ и центръ $с$ проведена будетъ плоскость, которой сѣченіе съ шаромъ составляетъ великій кругъ веиго; говорю, что сей кругъ будетъ перпендикуляренъ двумъ кругамъ $авс$, $аес$.

Ибо если проведены будутъ радіусы $вс$, $ес$, то углы $асв$, $асе$ имѣющіе мѣрою дуги $ав$, $ае$, каждую въ 90° , будутъ прямые; по сему линія $ас$ перпендикулярна двумъ прямымъ $вс$, $ес$; слѣдовательно (180) она перпендикулярна ихъ плоскости, то есть кругу веиго; а по сему два круга $авс$, $аес$, проходящіе чрезъ прямую $ас$, суть также перпендикулярны сему самому кругу

(184); что ради обратно и сей кругъ имъ перпендикуляренъ.

Послику не предположили мы никакой опредѣленной величины углу $\delta a\Gamma$, или $\delta a\beta$; но явно, что поже самое воспослѣдустъ, какая бы ни была величина сего угла; а изъ сего и слѣдустъ, что кругъ веимо перпендикуляренъ всѣмъ кругамъ проходящимъ чрезъ прямую $a\beta$.

Прямая $a\beta$ называется ось круга веимо; а двѣ точки a и β , сущія на поверхности шара, называющся полюсы (поли) сего же круга.

325. И такъ заключаемъ; т е, что полюсы какого либо великаго круга, равно отдалены отъ всѣхъ точекъ обвода его великаго круга; и разнояние сихъ точекъ до каждаго изъ полюсовъ, измѣряемое дугою великаго круга, есть дуга 90° .

И обратно, ежели какая либо точка a поверхности шара, удалена на 90° отъ двухъ точекъ β и γ , взятыхъ на дугѣ великаго круга; то точка a есть полюсъ сего великаго круга.

326. 2 е. Чтокогда дуга не великаго круга, перпендикулярна другой дугѣ ве великаго круга; то она непременно проходитьъ чрезъ полюсъ сей дуги, или по крайней мѣрѣ пройдетъ, естли продолжена будетъ довольно.

327. 3 е. Что ежели двѣ дуги ве, ес великаго круга перпендикулярны третьей дугѣ великаго круга ве; точка a ; гдѣ они встрѣчающся; есть полюсъ сей дуги.

328. Послику двѣ прямыя $\beta\gamma$, $\beta\delta$ суть перпендикулярны прямой $a\beta$ при той же точкѣ β ; то уголъ $\beta\gamma\delta$ оныхъ содержащий (191) есть

мѣра наклоненія двухъ плоскостей ABD , AED ; или мѣра сферическаго угла EAB или GAF ; чего ради

Сферической уголъ GAF имѣетъ мѣрою дугу въ великаго круга, которую стороны его (продолженныя ежели пошребно) объемлютъ въ разстояніи на 90° отъ вершины.

329. Ежели представимъ, что полукружіе ABD обращается около діаметра AD , и что отъ различныхъ точекъ K , B , H , его обвода опущены на AD перпендикуляры KQ , BC , HP ; то явствуется.

1 с. Что каждая изъ сихъ точекъ описываетъ обводъ круга, косто центръ есть на AD , въ точкѣ, гдѣ падаетъ перпендикуляръ; сей же перпендикуляръ есть радіусъ описываемаго круга.

2 с. Что дуги KS , BE , HL , описываемыя во время сего обращенія, и переняшыя двумя плоскостями ABD , AED , суть того же числа градусовъ; ибо ежели проведены будущъ линіи SQ , ES , LP , будущъ всѣ онѣ перпендикулярны къ AD , посланку онѣ суть не что иное какъ радіусы KQ , BC , HP ; достигающіе плоскости AED ; посему (191) каждый изъ угловъ QKS , BCE , HPH ; или каждая изъ дугъ KS , BE , HL измѣряетъ наклоненіе двухъ плоскостей ABD , AED ; чего ради всѣ сїи дуги суть того же числа градусовъ.

3 с. Величины сихъ дугъ KS , BE , HL , суть пропорціональны синусамъ дугъ AK , AB , AH , которые измѣряющъ ихъ разстояніе до того же полюса A ; или, что тоже самое, они пропорціональны косинусамъ ихъ разстояній до великаго круга, которому они параллельны. Ибо явно, что сїи дуги будучи подобны, пропорціональны своимъ радіусамъ KQ , BC , HP , кои суть синусы дугъ AK , AB , AH , или косинусы дугъ BK , OB , HN .

320. Ежели вообразить, что шаръ авромъ представляеиъ земаю, а $а\delta$ ея ось, или шопъ изъ ея діаметровъ, около котораго производишъ она суточное обращеніе; то кругъ венмо, равноотстоящій отъ обеихъ полюсовъ $а$ и $в$, называется экваторъ. Круги $авд$, $аев$ и всѣ имъ подобныя, конхъ плоскости проходяшъ чрезъ ось $а\delta$, называющіяся меридіаны; малыя круги, конхъ части представляющъ здѣсь дуги rs , $нл$, называющіяся параллели экватора, или просто параллели. Дуги $ви$, $ел$, измѣряющія разстояніе параллели до экватора, называющіяся широтою, или параллели или мѣста лежащаю на ея окружности.

Дабы опредѣлить положеніе мѣста на землѣ, отнесаиъ его къ двумъ кругамъ неподвижнымъ и между собою перпендикулярнымъ, каковы суть круги $авром$, $венмо$, такимъ образомъ: берущъ за сравнительный кругъ меридіанъ $авром$, проходящій чрезъ извѣстное и опредѣленное мѣсто; и чтобы утвердишъ положеніе другаго мѣста $л$, воображающъ чрезъ сіе мѣсто другой меридіанъ $авл$. Явнвусишъ, что положеніе сего меридіана знаемо будешъ, ежели извѣстно, сколько градусовъ въ дугѣ $ве$, включенной между шпчками $в$ и $е$, гдѣ сей меридіанъ встрѣчается съ экваторомъ. Точка $в$ будучи неподвижна, къ которой отношеніе имѣющъ всѣ дуге меридіаны; дуга $ве$ называется шпгда долготною (*) меридіана $авр$, и всѣхъ мѣстъ находящихся на семъ меридіанѣ; и шакъ дабы опредѣляиъ положеніе мѣста $л$, остается только знати число градусовъ дуги $ел$;

(*) Обыкновенно шпщаншъ долготу отъ запада къ востоку; кругъ, отъ котораго начинающъ шпщати, называется первыи меридіанъ: Франгузы избрали за сей меридіанъ шопъ, который проходитъ чрезъ островъ Феръ, западнѣишій изъ Канзирскихъ острововъ.

се-го называется широта мѣста *л*, также и всѣхъ мѣстъ находящихся на параллели, которой дуга *нл* есть часть.

Изъ сего видно, что всѣ мѣста находящіяся на томъ же меридианѣ, имѣютъ ту же длину; а находящіяся на той же параллели ту же широту; но одна только точка *л*, (по крайней мѣрѣ въ той же половинѣ шара, или въ томъ же полушаріи) можетъ имѣть въ то же время данную длину и широту. Чего ради положеніе мѣста уже опредѣлено, когда длина и широта его извѣстны; но въ разсужденіи широты должно знать еще къ которому полюсу оную считать должно. И такъ положивъ, что полюсъ *а* есть полунощный или южный; а полюсъ *б* полунощный или сѣверный, должно знать южная или сѣверная широта; ибо легко можно представить, что можетъ быть, и что дѣйствительно есть точка въ полушаріи южномъ, которой положеніе таже, что и точки *л* находящейся въ сѣверномъ полушаріи.

Величина градуса великаго круга земли равна 20 морскимъ Французскимъ лигамъ, то есть 20 такимъ лигамъ, въ коихъ каждая мѣста 2853 шага; также земной градусъ равенъ 60 Италіянскимъ милямъ, 15 Нѣмецкимъ милямъ и 104 верс. 97 саж. Посему ежели идешь по экватору; то чрезъ каждыя 60 Италіянскихъ миль перемѣняется длина однимъ градусомъ; также идучи по меридіану, чрезъ каждыя 60 миль перемѣняется однимъ градусомъ широты. Если же идешь по параллели экватора; то явно, что чрезъ каждыя 60 миль перемѣняется длина болѣе нежели на градусъ, и тѣмъ болѣе, чѣмъ та параллель, по которой идешь, болѣе удалена отъ экватора. Чтобъ найти сколько градусовъ длины соотвѣтствуетъ нѣкоторое число миль ир, пе-

рейденихъ по извѣстной параллели, должно сдѣ-
лать сію пропорцію: косинусъ широты къ ра-
діусу, такъ какъ число миль перейденныхъ
по параллели къ четвертому члену, которой
будетъ число миль соотвѣтствующей дуги ве-
скватора, которая означаетъ перемѣну въ долго-
тѣ. Сіе есть непосредственное слѣдствіе сказа-
ннаго въ (329). Напримѣръ полагая что въ ши-
ротѣ $47^{\circ}, 20'$ пройдено 18 Италіянскихъ миль по
параллели экватора, и спрашивается, на сколько
перемѣнилась долгота; то будетъ сія пропорція:
кос. $47^{\circ}, 20'$ или син. $42^{\circ}, 40'$: R :: 18 миль къ
четвертому члену, который выйдетъ 26, 56 м.
Итакъ перемѣнили долготу на 26, 56 м. или на
 $0^{\circ}, 26'. 34''$.

Обратимся теперь къ свойствамъ шара.

331. Положимъ, что $AFJG$, $BFHG$ суть два фиг. 167.
великіе круги шара; и $ABDEJH$ претій великій
кругъ, сѣкущій сіи два перпендикулярно; слѣдуетъ
изъ сказаннаго (326), что кругъ $ABDEJH$ про-
ходитъ чрезъ полюсы двухъ круговъ $AFJG$, $BFHG$;
да будутъ сіи полюсы D и E ; а DK и EL двѣ оси.
Посланку углы $асв$, все прямые; то, ежели отъ
каждо- изъ сихъ отнять будетъ общій уголъ
 $всв$; остальные углы $асв$, все будутъ равны; а
посему и дуги $ав$, $де$ равны; чего ради дуга $де$,
измѣряющая крапчайшее разстояніе полю-
совъ двухъ великихъ круговъ, равна дугѣ
 $ав$, измѣряющей меньшій изъ двухъ угловъ,
которыя сіи круги дѣлають.

Свойства сферическихъ треуголь- никовъ.

332. Явствуетъ, что чрезъ двѣ точки, взятыя на поверхности шара, можно прове-
сти только одну дугу великаго круга. Ибо сей великій
кругъ есть сѣченіе поверхности шара съ плос-
костію долженствующею пройти чрезъ центръ;
извѣстно же, что чрезъ при данныхъ точки можно
провести одну только плоскость.

333. Хотя сферическій треугольникъ мо-
жетъ имѣть нѣкоторыя изъ своихъ частей
больше 180° ; однако мы будемъ разсуждать о
такихъ только, которыхъ каждая часть меньше
 180° ; посылку можно всегда знать одинъ изъ сихъ
фиг. 166. треугольниковъ посредствомъ другаго. Напри-
мѣръ, ежели предлагается треугольникъ АВЕМУ
составленный изъ нѣкоторыхъ дугъ АВ, АУ, и
дуги вму большей 180° ; то вообразивъ цѣлый
кругъ вмув, можно вмѣсто треугольника АВЕМУ
взять треугольникъ воуа, котораго дуга воу
меньше 180° ; ибо части перваго треугольника
или равны частямъ втораго, или ихъ суппле-
менты до 180° , или до 360° ; посему и видно,
что одинъ изъ сихъ треугольниковъ можетъ
быть извѣстенъ посредствомъ другаго.

334. Каждая сторона сферическаго тре-
угольника меньше суммы двухъ прочихъ
сторонъ.

Сіе явствуетъ.

335. Сумма трехъ сторонъ сферическаго
треугольника всегда меньше 360° .

Послику (334) FG меньше $DE + DF$; но $GA +$
 AF сложенные съ $DE + DF$ составляютъ 360° ;
следовательно $AG + AF$ сложенные съ FG будутъ
меньше 360° .

336. Да будетъ авс какой нибудь сфе- рической треугольникъ; и деф другой сфе- рической треугольникъ такой, что точка а есть полюсъ дуги еф. точка с полюсъ дуги де, и точка в полюсъ дуги df; говорю, что каждая сторона треугольника деф будетъ супплементъ угла противолежащаго ей въ треугольникъ авс; и каждый уголъ треугольникъ деф будетъ супплементъ спо- роны противолежащей ему въ треугольни- къ авс.

Ибо когда точка а есть полюсъ дуги еф; точка е должна быть удалена отъ точки а на 90° (325); посему же, когда с есть полюсъ дуги де, точка е должна отстоять на 90° отъ точки с; следовательно (325) точка е есть полюсъ дуги ас; такимъ же образомъ можно доказать, что точка в есть полюсъ дуги вс, а f полюсъ дуги ав.

Положивъ сіе, продолжимъ дуги ас, ав, по- ка встрѣтяся съ дугою еф въ точкахъ г и н; послѣку точка е есть полюсъ дуги асг, то дуга ег 90° , а точка f есть полюсъ дуги анв, то и дуга фн 90° ; посему ег + фн или ег + ег + гн или еф + гн равны 180° ; но дуга гн есть мѣра угла а (328), ибо каждая изъ дугъ ас, ан равна 90° ; следовательно еф + а равны 180° ; чего ради дуга еф есть супплементъ угла а. Такимъ же образомъ докажется, что дуга де есть суппле- ментъ угла с, а df супплементъ угла в.

Продолжимъ дугу ав, доколѣ встрѣдятся съ дугою df въ точкѣ j. Каждая изъ дугъ ан и вj будетъ 90° , ибо точки а и в суть полюсы дугъ еф, df; посему ан + вj, или ан + ав + aj, или нj + ав равны 180° , но дуга нj есть мѣра угла к (328); ибо точка f полъ дуги нj; следовательно ф + ав равны 180° ; чего ради уголъ f есть суп-

племени дуги $ав$. Такимъ же образомъ докажется, что уголъ $е$ есть супплементъ дуги $ас$; а уголъ $в$ супплементъ дуги $вс$.

337. Заключимъ отсюда, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника всегда меньше 540° или трижды 180° , а больше 180° .

Послему сумма трехъ угловъ $а$, $в$, $с$ суммою трехъ сторонъ $еф$, $дф$, $де$ равны трижды 180° (336); следовательно, $г$ $е$, сумма трехъ угловъ $а$, $в$, $с$ меньше трижды 180° ; или 540° . 2 $с$, ибо сумма трехъ сторонъ $еф$, $дф$, $де$ (335) меньше 360° или дважды 180° ; отсюда для суммы трехъ угловъ $а$, $в$, $с$ больше 180° .

338. Сферическій треугольникъ можетъ имѣть всѣ три угла прямые, и всѣ три угла тупые.

И такъ видно, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника не такое количество, которое бы всегда было то же, какъ въ прямолинейныхъ треугольникахъ; следовательно не можно изъ двухъ извѣстныхъ угловъ заключить о третьемъ.

339. Посему каждая изъ частей треугольника $деф$ есть супплементъ каждой противоположащей ей части въ треугольникъ $авс$; то можно рѣшить одинъ изъ сихъ треугольниковъ посредствомъ другаго; ибо зная части одного, извѣстны будутъ части другаго. Мы будемъ употреблять сей способъ; и понеже сей два треугольника часто будутъ встрѣчаться; то для сокращенія назовемъ треугольникъ $деф$ супплементнымъ (исполнительнымъ) треугольникомъ.

340. Два сферическихъ треугольника, изображенные на помѣ же или равныхъ шарахъ, равны бывающъ, 1 $с$; когда имѣющъ равную сторону прилежащую двумъ равнымъ

угламъ единъ по единому. 2 е, когда имѣють
равный уголъ содержимый въ равныхъ сто-
ронахъ едина по единой. 3 е, когда имѣють
при споронѣ равныя едина по единой. 4 е,
когда имѣють при угла равныя единъ по
единому.

Первые три случая доказываются точно
такъ, какъ и въ прямолинейныхъ треугольни-
кахъ. Смори 80, 81 и 83.

Что касается до четвертаго случая, послѣ-
ку онъ не имѣетъ мѣста въ прямолинейныхъ
треугольникахъ, то онъ доказывается особанво
слѣдующимъ образомъ.

Да будутъ написаны каждаго изъ треуголь- фиг. 168.
никовъ авс и асв супплементарные треугольники и 169.
дег и def. Понеже углы а, в, с, равны угламъ а,
в, с, каждый каждому, то и споронѣ ег, де, дф
супплементарны первыхъ угловъ, будутъ также ра-
вны споронамъ ef, df, de супплементарамъ послѣ-
днихъ; и такъ по предъшему изъ упомянутыхъ
случаевъ сн два треугольника дег и def будутъ
совершенно равны; чего ради и углы д, е, г, бу-
дутъ равны угламъ d, e, f, каждый каждому; а по-
тому и споронѣ вс, ас, ав супплементарны первыхъ
трехъ угловъ, будутъ равны споронамъ вс, ас, ав,
супплементарамъ трехъ послѣднихъ угловъ.

341. Въ равнобедренномъ сферическомъ
треугольникѣ углы противъ равныхъ сто-
ронъ взаимно равны; и обратно, ежели два
угла въ сферическомъ треугольникѣ взаим-
но равны, противулежащія имъ споронѣ
также равны.

Омъ равныхъ споронъ ав, ас, отними рав-
ныя дуги ад, ае, и проводи дуги великихъ кру-
говъ вс, ве: и такъ два треугольника авс, аев, фиг. 170,
имѣющіе общій уголъ, содержимый въ двухъ рав-
ныхъ споронахъ едина по единой, будутъ взаимно

равны (340): а посему и дуга $вв$ равна будетъ дугѣ $св$; слѣдовательно два треугольника $вдс$ и $всв$ взаимно равны; понеже кромѣ $вс$ равной $вв$, какъ сіе видѣан, они имѣютъ $вс$ общую, и еще прочія стороны $вд$, $св$ равныя; ибо сіи стороны суть остатки двухъ равныхъ дугъ $ав$, $ас$, отъ которыхъ отняты равныя дуги $ад$, $ае$. А изъ сего, что два треугольника взаимно равны, можно заключить, что уголъ $двс$ или $авс$ равенъ углу $всв$ или $асв$.

Что касается до второй части предложенія, то она есть слѣдствіе первой; ибо вообразивъ супплементный треугольникъ $дег$, деѣ стороны его $дг$, $де$, будучи супплементы равныхъ угловъ $вдс$, суть равны; по сему треугольникъ $дег$ будетъ равнобедренный; и такъ углы $егг$ будутъ взаимно равны; чего ради и супплементы ихъ стороны $ас$ и $ав$ будутъ взаимно равны.

фиг. 168. 342. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ $авс$ большая сторона противулежащій большему углу, и обратно.

Ежели уголъ $в$ больше угла $а$, можно внутри треугольника провести дугу великаго круга $вд$ такъ, чтобъ слѣдала уголъ $авд$ равный углу $ваб$; посему $вд$ будетъ равна $ад$ (341); но $вд + вс$ больше $вс$; слѣдовательно $ад + вс$ или $ас$ будетъ больше $вс$.

Обратное удобно доказать можно подобнымъ образомъ, упоминая супплементный треугольникъ.

Послѣднія показанныя предложенія полезны въ рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, гдѣ все искомое опредѣляется синусами или тангенсами, которые принадлежатъ дугамъ меньшимъ 90° , или ихъ супплементамъ. могутъ часто навести сумнѣніе, которую изъ сихъ дугъ принять должно; но сіи знанія не довольны для показанія. въ какихъ

случаяхъ искомое должно быть больше или меньше 90° , и въ такихъ случаяхъ можно взять и то и другое.

Средства узнавать, въ какихъ случаяхъ искомыя углы, или синоды прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ должны быть больше или меньше 90° .

343. Хотя два и даже три угла прямоугольнаго сферическаго треугольника могутъ быть прямые, а посему могутъ быть въ семъ треугольникѣ двѣ или три ипоменусы, однакожъ мы будемъ называть ипоменусой только сторону противоположащую тому прямому углу, о которомъ будемъ разсуждать; а прочие два угла называть будемъ косвенными углами.

344. Каждый изъ двухъ косвенныхъ угловъ прямоугольнаго сферическаго треугольника одинакъ со стороной ему противоположащей; то есть ежели сторона 90° , то и уголъ 90° , и ежели сторона больше или меньше 90° , то и уголъ будетъ больше или меньше 90° .

Да будетъ уголъ в прямой; ежели же меньше 90° , то продолживъ оную до точки в, такъ чтобъ вв была 90° ; точка в будетъ полюсъ дуги ав (326); почему дуга великаго круга вв, проведенная отъ края стороны в а, будетъ перпендикулярна къ в а; следовательно уголъ вав будетъ прямой; чего ради уголъ сав меньше 90° . Подобнымъ образомъ можно доказать и другіе два случая.

345. Ежели двѣ стороны, или два угла прямоугольнаго сферическаго треугольника одинаки, то есть каждое меньше или больше 90° ; ипоменуса всегда будетъ меньше 90° ; напоинивъ, ежели не одинаки, ипоменуса будетъ больше 90° .

Ибо, положивъ тоже устройство что и въ предвѣдущемъ предложеніи. ежели и а в меньше 90° , уголъ авв, который долженъ быть (344) одинакъ со стороною ав, будетъ меньше 90° ; для тойже причины уголъ асв будетъ меньше 90° ; следовательно уголъ асв будетъ тупой, и посему больше угла авс; чего ради ав больше ас (342); но ав 90° , следовательно ас меньше 90° .

Фиг. 173. Подобнымъ образомъ ежели двѣ стороны в с, и ав около прямого угла в, каждая больше 90° ; ипошенуза а с будетъ тогда меньше 90° ; ибо ежели взявъ дугу в р равную 90° , точка р будучи полюсъ дуги ав, дуга ар будетъ 90° ; но посылку ав больше 90° ; уголъ асв будетъ тупой (344). Тоже и такимъ же образомъ можно сказать и о углѣ авв; и посему уголъ авс будетъ острый, следовательно меньше угла асв; чего ради также ас будетъ меньше ав (342), то есть меньше 90° .

Напротивъ, ежели ав меньше 90° ; а в с больше; тогда уголъ асв, который одинакъ со стороною ав (344), будетъ острый. Тоже самое можно сказать и о углѣ авв: и посему уголъ авс будетъ тупой, следовательно больше угла асв; чего ради ас будетъ больше ав, то есть больше 90° .

Что касается до угловъ сравниваемыхъ съ ипошенузою, истинна сего предложенія слѣдуетъ изъ того, что каждый изъ угловъ одинакъ съ противоположною ему стороною (344).

346. Опредѣляя, с. что ежели ипошенуза меньше или больше 90° ; стороны и косвенные углы будутъ одинаки, или не одинако между собою.

347. 2 е. Ежели ипошенуза и одна изъ сторонъ одинаки или не одинаки, осмалъная сторона и уголъ ей противоположный будетъ, меньше или больше 90° .

Начала для рѣшенія прямоуголь- ныхъ сферическихъ треугольни- ковъ.

348. Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ зависить отъ трехъ началъ, которыя предложены будуще по порядку, и изъяснены въ послѣдствіи примѣрами. Первос начало есть общее прямоугольнымъ и косвенно-угольнымъ сферическимъ треугольникамъ.

Каждый случай прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ можно рѣшить одною пропорціею, которая всегда можетъ быть выведена изъ одного или другаго изъ трехъ слѣдующихъ началъ.

349. Во всякомъ сферическомъ треуголь-
никѣ авс пребываетъ всегда сія пропорція: фиг. 175.
синусъ одного изъ угловъ содержишся къ синусу противуположащей ему стороны, такъ какъ синусъ другаго угла, къ синусу стороны противуположащей сему углу.

Да будетъ точка н центръ шара, вн, а н, нс при радиуса, и отъ вершины угла а да будетъ опущенъ перпендикуляръ ад на плоскость противуположащей стороны вс, и чрезъ сію прямую да пройдутъ двѣ плоскости аде, аде, такъ чтобъ радиусы вн, сн были имъ перпендикулярны, а именно радиусъ вн перпендикуляренъ плоскости аде, а радиусъ сн перпендикуляренъ плоскости аде. Линіи ае, де сѣченія двухъ плоскостей авн, свн съ плоскостію аде, будуще перпендикулярны къ вн общему сѣченію сихъ двухъ плоскостей; и посему уголъ аед будуще наклоненіе двухъ плоскостей (191), слѣдовательно равенъ сферическому углу авс (320); по сей же причинѣ уголъ аед равенъ будуще сферическому углу авс.

Положивъ сіе, два треугольника ABE , ADF , имѣя прямые углы при точкѣ B , дадушъ сіи пропорціи (295):

$$B : \sin. AEB :: AE : AD, \\ \text{и } \sin. AFD : B :: AD : AF.$$

Слѣд. (100) $\sin. AFD : \sin. AEB :: AE : AF$.

Но линіи AE , AF будучи перпендикулярны опущенныя отъ края A дугъ AB , AC къ радіусамъ BN , BN , проходящимъ чрезъ другіе края сихъ дугъ, суть (269) синусы сихъ самыхъ дугъ; чего ради, понеже углы AEB , AFD равны угламъ $в$ и $с$, будешъ $\sin. с : \sin. в :: \sin. АВ : \sin. АС$.

Такимъ же образомъ можно доказать, что $\sin. с : \sin. А :: \sin. АВ : \sin. ВС$.

350. Еслии одинъ изъ сравнимыхъ угловъ прямой, то, поелику синусъ его тогда равенъ радіусу (274). сказанная пропорція можешъ бытъ такъ поставлена: радіусъ къ синусу ипштенузы, такъ какъ синусъ одного изъ косвенныхъ угловъ, къ синусу противулежащей ему стороны.

351. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ, радіусъ содержишся къ синусу одной изъ сторонъ около прямого угла, такъ какъ тангенсъ косвеннаго угла противулежащаго другой сторонѣ, къ тангенсу сей стороны.

фиг. 176. Да будешъ уголъ в прямой. Отъ края с стороны BC да будешъ проведенъ перпендикуляръ CJ къ радіусу шара BN ; и чрезъ сію прямую CJ , да пройдетъ плоскость CJE такъ, чтобъ радіусъ BN былъ къ ней перпендикуляренъ: тогда уголъ JE равенъ будешъ сферическому углу A ; и поелику полагается, что двѣ плоскости BCS , BCJ перпендикулярны между собою: то линія CJ , перпендикулярная общему ихъ сѣченію BC , будешъ (185) перпендикулярна плоскости BCA ; а посему и прямой JE (178).

Положивъ сіе въ прямоугольномъ треугольникѣ

будетъ (296) $ДІ:СІ::R:шан. JPC$; также въ
прямоугольномъ треугольникѣ $ЕІС, СІ:ІЕ::шан.$
 $ІЕС:R$; четверти (100) $ДІ:ІЕ::шан. ІЕС:шан. JPC$
шан. :: шан. $A:шан. BC$; ибо уголъ JPC имѣетъ
мѣрою дугу BC . Если же въ прямоугольномъ треу-
гольникѣ $ІЕВ$ (295) $ДІ:ІЕ::R:син. JDE$ или $син. АВ$;
слѣдовательно ради obsahu содержанія $ДІ КВ ІЕ$
будетъ $R:син. АВ::шан. A:шан. BC$.

352. Во всякомъ прямоугольномъ сфери-
ческомъ треугольникѣ $авс$, ежели продолже-
ны будутъ двѣ стороны BC, AC около одного
изъ косвенныхъ угловъ, къ шочкамъ $Д$ и $Е$,
такъ, чтобы каждая изъ $ДВ, АЕ$ была 90° ; и
еслии край ихъ шочки $Д$ и $Е$ будутъ соеди-
нены дугою великаго круга $ДЕ$; соснавшись
новый прямоугольный треугольникъ $сЕД$,
имѣющій прямой уголъ при шочкѣ $Е$, копо-
раго частии будутъ или равныя частіямъ
треугольника $авс$, или ихъ комплементы.

Продолжимъ стороны $ав$ и DE , пока встрѣ-
нутся въ шочкѣ $Г$. Послѣку $вД$ есть 90° , и пер-
пендикулярна $КВ$ $ав$, то шочка $Д$ есть полюсъ
дуги $ав$ (326); посему $ДГ$ есть 90° , и перпенди-
кулярна $КВ$ $аГ$; для той же причины и $аГ$ есть 90° .

Потомъ $аЕ$ по усмотрѣнію 90° ; есть же и $аД$
 90° ; то шочка $А$ есть полюсъ дуги $ДГ$ (325); а
посему $аЕ$ перпендикулярна $КВ$ $ДГ$, и слѣдователь-
но треугольникъ $сЕД$ прямоугольный, имѣющій
прямый уголъ при шочкѣ $Е$.

Положивъ сѣ, явно, что уголъ $Е$ равенъ у-
глу $в$, и что уголъ $всЕ$ равенъ углу $асв$ (321);
что сторона $вс$ есть комплементъ стороны $св$;
что сторона $вЕ$ будучи комплементъ $ЕГ$, копорая
есть (328) мѣра угла $сав$; есть комплементъ сего
угла $сав$; что $сЕ$ есть комплементъ $ас$; и что
уголъ $Д$, имѣющій мѣрою дугу $вГ$, копорая ком-
плементъ $ав$, есть самъ комплементъ сей дуги $ав$;

чего ради дѣйствиельно части треугольника дсе, или равны частямъ треугольника авс, или ихъ комплементы.

Можно тоже самое доказать и о треугольникѣ анј, который изобразится продолжая выше точки а, стороны ва, ас около косвеннаго угла вас, доколѣ каждая сдѣлается 90° .

353. Изъ сего явствуется, что когда извѣстны въ треугольникѣ авс три вещи, то извѣстны будутъ три вещи и въ каждомъ изъ треугольниковъ сев, анј. Также видно, что остальные три части въ треугольникѣ авс, будучи сысканы, сдѣлаютъ извѣстными остальные три части въ каждомъ изъ сихъ двухъ треугольниковъ сев, анј, и обратно.

И такъ, когда разрѣшая треугольникъ авс, не можно употребить непосредственно ни единого изъ двухъ началъ показанныхъ (349 и 351); въ такомъ случаѣ должно прибѣгнуть къ одному изъ треугольниковъ сев, анј; и тогда приложеніе того или другаго изъ сихъ двухъ началъ будетъ имѣть мѣсто, и дася свѣденіе о частяхъ сихъ треугольниковъ, которые потомъ сдѣлаютъ извѣстными части треугольника авс, какъ о семъ сей часъ было сказано. Мы впредь называть будемъ треугольники сев, анј комплементными (дополнительными) треугольниками.

фиг. 178.

Ежели бы стороны ав, ас, или ас, вс, которыя въ доказанной пропорціи (352) полагаются меньше 90° , были каждая больше, или одна изъ нихъ больше, а другая меньше 90° , какъ въ треугольникѣ гвс; тогда вмѣсто вычисленія треугольника гвс, надлежало бы вычислить треугольникъ авс, составленный изъ дугъ гс, гв, продолженныхъ до 180° ; части сего треугольника будучи извѣстны, сдѣлаютъ извѣстными и части треугольника гвс. Въ прочемъ имѣть необходимость въ семъ способѣ; пропорція, которую

покажетъ фигура 177, имѣетъ всегда мѣсто; хотя бы части треугольника были меньше или больше 90° .

Замѣтимъ о прямоугольныхъ сферическихъ треугольникахъ то, что мы сказали о прямоугольныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ; а именно, что прямой уголъ будучи извѣстенъ, довольно, чтобъ рѣшить прямоугольный треугольникъ, зная двѣ вещи кромѣ прямого угла. Приступимъ теперь къ примѣрамъ.

Примѣръ I. Положимъ сторону вс $15^\circ, 17'$; уголъ а, $23^\circ, 42'$; требуется сыскать ипошенузу фиг. 177. а с.

Для сысканія ипошенузы, можно непосредственно употребить начало показанное (349), учинивъ сию пропорцію: син. а: син. вс :: r: син. а с. Сія пропорція есть не что иное, какъ показанная (350), которой переставлены оба сoderжанія. Въ настоящемъ случаѣ будемъ имѣть: син. $23^\circ, 42'$: син. $15^\circ, 17'$:: r: син. а с.

Дѣлая по логарифмамъ, будетъ:

лог. син. $15^\circ, 17'$	-	-	-	-	-	9, 4209330
лог. радиуса	-	-	-	-	-	10, 0000000
арнем. допол. логар. син. $23^\circ, 42'$	-	-	-	-	-	0, 3958304

Сумма или лог. а с. - 19, 8167634

Сей логарифмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ $40^\circ, 59'$, такъ что ипошенуза а с есть $40^\circ, 59'$, ежели она должна быть меньше 90° ; или исполненіе $40^\circ, 59'$, то есть $139^\circ, 1'$, ежели она должна быть больше 90° ; ибо здѣсь ничѣмъ не можно ограничить, что ипошенуза а с меньше или больше должна быть 90° , и сѣ два рѣшенія суть равно возможные; въ чемъ легко можно увѣришься, смотря на фигуру 178, гдѣ два треугольника авс, аде, могутъ прошивъ того же угла а, имѣть сторону вс, равную

сторонѣ де; а ипошенизы ас, ае различныя. Но продолжая ас. ав, доколѣ встрѣнятся въ точкѣ ф, видно, что ае есть исполненіе ас, поелику ае есть исполненіе еф, равной ас, когда де равна вс.

Примѣръ II. Для сысканія стороны ав того же треугольника авс, можно прямо употребивъ предложеніе показанное (351), дающее сію пропорцію: $r : \sin. ав :: \tan. а : \tan. вс$, или $\tan. а : \tan. вс :: r : \sin. ав$, по есшъ, $\tan. 23^\circ. 42' : \tan. 15^\circ. 17' :: r : \sin. ав$.

А по логарифмамъ дѣлая, будетъ:

лог. тан. $15^\circ. 17'$	-	-	-	-	9, 4365704
лог. радіуса	-	-	-	-	10, 0000000
арне. доп. лог. тан. $23^\circ. 42'$	-	-	-	-	0, 3575653

Сумма, или логарифмъ син. ав - 19, 7941362

Сей логарифмъ соотвѣстствуетъ въ таблицахъ дугѣ $38^\circ. 30'$, и сторона ав есть $38^\circ. 30'$, или $141^\circ. 30'$, судя по тому, меньше или больше она должна быть 90° ; то есть, должна ли она принадлежать треугольнику авс, или треугольнику аде.

Примѣръ III. Прямый уголъ, уголъ а, и сторона вс будучи всегда одни извѣстныя вещи, примѣчаю, что для сысканія угла с того же треугольника, нельзя приложить ни которой изъ двухъ показанныхъ пропорцій (349 и 351), поелику не могу имѣть какъ только двѣ извѣстныя вещи въ одной и въ другой; чего ради прибѣгаю къ комплементарному треугольнику дсе, въ коемъ сторона де, комплементъ угла а $23^\circ. 42'$, будетъ $66^\circ. 18'$; сторона или ипошениза дс комплементъ вс или $15^\circ. 17'$, будетъ $74^\circ. 43'$, и уголъ дсе равенъ искомому углу асв. Въ треугольникѣ же дсе можно приложить пропорцію показанную въ (350); а именно: $\sin. дс : r :: \sin. де : \sin. дсе$; то есть син. $74^\circ. 43' : r :: \sin. 66^\circ. 18' : \sin. дсе$.

Дѣлая по логарифмамъ:

лог. син. $66^{\circ}, 18'$	-	-	-	-	9, 9617355
лог. рад.	-	-	-	-	1,
арифм. допол. лог. син. $74^{\circ}, 43'$	-	-	-	-	<u>0, 0156374</u>

Сумма или лог. син. дсе - 19, 9773729

Сей логарифмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ $71^{\circ}, 40'$; слѣдовательно уголъ дсе, а посему искомый уголъ асв, есть $71^{\circ}, 40'$, или $108^{\circ}, 20'$, супплементъ $71^{\circ}, 40'$; ибо здѣсь ничто не ограничивается, таковъ ли долженъ быть разрѣшаемый треугольникъ асв, какъ треугольникъ асв фигуры 178, или таковъ какъ треугольникъ аев сей же самой фигуры; но и останется неизвѣстнымъ, уголъ ли асв взять должно, или уголъ аев, супплементъ его.

Примѣръ IV. Да будетъ сторона ав треугольника авс, $48^{\circ}, 51'$, и сторона вс $37^{\circ}, 45'$; ежели потребно найти гипотенузу ас, должно прибѣгнуть къ комплементарному треугольнику дсе, въ которомъ тогда извѣстна будетъ гипотенуза дс, ибо есть комплементъ вс или $37^{\circ}, 45'$; и слѣдовательно будетъ $52^{\circ}, 15'$; извѣстенъ также уголъ д, имѣющій мѣрою вф, комплементъ ав или $48^{\circ}, 51'$, посему будетъ онъ $41^{\circ}, 09'$; а для сысканія гипотенузы ас, должно только вычислить сторону се, которой она есть комплементъ. Въ треугольникѣ же дсе, для се, должно сдѣлать сию пропорцію (350): $р: \sin. дс:: \sin. д: \sin. се$; то есть $р: \sin. 52^{\circ}, 15':: \sin. 41^{\circ}, 09': \sin. се$.

Дѣлая по логарифмамъ, будетъ:

лог. син. $41^{\circ}, 09''$	-	-	-	-	9, 8182474
лог. син. $52, 15$	-	-	-	-	<u>9, 8980060</u>

Сумма - - - - - 19, 7162534

Лог. рад. - - - - - 1,

Остатокъ или лог. син. се. - 9, 7162534

соотвѣтствующій въ таблицахъ $31^{\circ}, 21'$.

Слѣдовательно ас, которая есть дополненіе се;

будетъ непремѣнно $58^{\circ}.39'$; въ, понеже двѣ стороны ав, ас одинаки, ипошениза должна бышь (345) меньше 90° .

Примѣръ V. Числѣ изъ шѣхъ же данныхъ найши уголъ с, или уголъ а, должно прямо приложитъ предложеніе (351), кошорое для угла а дастъ слѣдующую пропорцію:

г: син. ав:: тан. а: тан. вс, или
син. ав: г:: тан. вс: тан. а; шо есть,
син. $48^{\circ}.51'$: г:: тан. $37^{\circ}.45'$: тан. а. По той же причинѣ будетъ для угла с сія пропорція: син. вс: г:: тан. ав: тан. с; шо есть, син. $37^{\circ}.45'$: г:: тан. $48^{\circ}.51'$: тан. с.

Дѣлая по логарифмамъ, будетъ для угла а:

лог. тан. $37^{\circ}.45'$	-	-	-	-	9, 8888996
лог. рад.	-	-	-	-	1,
ариф. допол. лог. син. $48^{\circ}.51'$	-	-	-	-	0, 1232111

Сумма или лог. тан. а - - - 10, 0121107

Для угла с:

лог. тан. $48^{\circ}.51'$	-	-	-	-	10, 0585415
лог. рад.	-	-	-	-	1,
ариф. допол. лог. син. $37^{\circ}.45'$	-	-	-	-	0, 2130944

Сумма или лог. тан. с - - - 10, 2716359

Отнявъ единицу отъ первой цифры, какъ сказано въ (297).

Симъ логарифмамъ соотвѣствуютъ въ таблицахъ $45^{\circ}.48'$ и $61^{\circ}.51'$; изъ которыхъ первое количество есть величина угла а, а второе величина угла с. Поселку каждая изъ двухъ сторонъ ав, вс меньше 90° ; два угла а и с должны бышь также (344) меньше 90° .

Сии примѣры довольно подашь свѣденіе, какимъ образомъ должно поступать въ другихъ случаяхъ; но чтобъ въ подобныхъ вычисленіяхъ не имѣть труда употреблять комплементахъ треугольниковъ, мы приложимъ здѣсь таблицу, показывающую пропорціи, какую должно брать въ каждомъ случаѣ.

табл
преу

Данн

ав, л

ав, л

ав,

ав,

вс,

вс,

вс,

ас,

ас,

а,

(а)

Таблица для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ
треугольниковъ, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ. (а)

Данныя	Искомыя	Пропорціи	Случаи въ которыхъ искомое должно быть меньше 90°
АВ, АС	С	Син. АС:R::син. АВ:син. С.	если АВ меньше 90°.
	А	Кос. АВ:кос. АС::R:кос. А.	если АВ и АС одинаки.
	В С	Кос. АВ:кос. АС::R:кос. В С.	если АВ и АС одинаки.
АВ, В С	А	Син. АВ:R::тан. В С:тан. А.	если В С меньше 90°.
	С	Син. В С:R::тан. АВ:тан. С.	если АВ меньше 90°.
	А С	R:кос. В С::кос. АВ:кос. АС.	если АВ и В С одинаки.
АВ, А	С	R:кос. АВ::син. А:кос. С.	если АВ меньше 90°.
	А С	R:кос. А::кос. АВ:кос. АС.	если АВ и А одинаки.
	В С	R:син. АВ::тан. А:тан. В С.	если А меньше 90°.
АВ, С	А	Кос. АВ:R::кос. С:син. А.	сумнительъ.
	А С	Син. С:син. АВ::R:син. АС.	сумнительна.
	В С	Тан. С:тан. АВ::R:син. В С.	сумнительна.
В С, АС	А	Син. АС:R::син. В С:син. А.	если В С меньше 90°.
	С	Кос. В С:кос. АС::R:кос. С.	если АС и В С одинаки.
	А В	Кос. В С:кос. АС::R:кос. А В.	если АС и В С одинаки.
В С, А	С	Кос. В С:R::кос. А:син. С.	сумнительъ.
	А С	Син. А:син. В С::R:син. АС.	сумнительна.
	А В	Тан. А:тан. В С::R:син. А В.	сумнительна.
В С, С	А	R:кос. В С::син. С:кос. А.	если В С меньше 90°.
	А С	R:кос. С::кос. В С:кос. АС.	если В С и С одинаки.
	А В	R:син. В С::тан. С:тан. А В.	если С меньше 90°.
А С, А	С	Кос. АС:R::кос. А:тан. С.	если АС и А одинаки.
	А В	Кос. А:R::кос. АС:кос. А В.	если АС и А одинаки.
	В С	R:син. АС::син. А:син. В С.	если А меньше 90°.
А С, С	А	R:кос. АС::тан. С:кос. А.	если АС и С одинаки.
	А В	R:син. АС::син. С:син. А В.	если С меньше 90°.
	В С	Кос. С:R::кос. АС:кос. В С.	если АС и С одинаки.
А, С	А С	Тан. С:кос. А::R:кос. АС.	если А и С одинаки.
	А В	Син. А:кос. С::R:кос. А В.	если С меньше 90°.
	В С	Син. С:кос. А::R:кос. В С.	если А меньше 90°.

(а) Сія таблица относится къ треугольнику АВС фигуры 177, въ которомъ
уголъ в прямой.

Показанныя въ сей таблицѣ пропорціи, всѣ основаны на двухъ началахъ доказанныхъ въ (349 и 351), и приложенныхъ, или непосредственно къ преугольнику abc , или къ комплементарнымъ преугольникамъ, потомъ перенесены къ преугольнику abc . На примѣръ, первая пропорція есть та же, что въ §. 349 или въ §. 350, приложенная непосредственно преугольнику abc , превращая только два содержанія. Вторая одинакова съ показанною въ §. 351, приложенная къ комплементарному преугольнику ced , въ которомъ $r : \sin. d e :: \sin. d : \sin. c e$; или относя къ преугольнику abc , $r : \cos. a :: \cos. ab : \cos. ac$; или предлагая первое содержаніе на мѣсто втораго, $\cos. ab : \cos. ac :: r : \cos. a$.

Такимъ же образомъ можно найти прочія пропорціи, показанныя въ сей таблицѣ. Преложенія сдѣланныя въ пропорціяхъ, которыя даютъ непосредственно два начала (349 и 351), не суть необходимы; единственный ихъ предметъ сдѣлать искомое количество четвертымъ членомъ пропорціи.

О сферическихъ косвенноугольныхъ преугольникахъ.

354. Прямоугольные сферическіе преугольники рѣшаются во всѣхъ случаяхъ одною только пропорціею. Что принадлежитъ до косвенноугольныхъ сферическихъ преугольниковъ, то во многихъ случаяхъ должно дѣлать двѣ пропорціи. Въ сихъ случаяхъ потребно опускать перпендикулярно дугу великаго круга, отъ одного изъ угловъ даннаго преугольника, на противуположную ему сторону. Поселку сія дуга можетъ упасть или на самую сторону, или на продолженіе ея; судя по различнымъ содержаніямъ величины сто-

ронъ и угловъ: потребно, прежде показанія началъ рѣшенія сего рода треугольниковъ, различить случаи, когда перпендикулярно проведенная дуга падаетъ внутри треугольника, и когда въ.

355. Дуга великаго круга $ад$, проведенная перпендикулярно ошъ угла $а$ сферическаго треугольника, на противоположную сторону, падаетъ въ треугольникъ, ежели углы $в$ и $с$ одинаки; и въ его, когда они не одинаки. фиг. 180 и 181.

Ибо въ прямоугольныхъ треугольникахъ $а в с$, $а в д$, каждый изъ двухъ угловъ $в$ и $д$ долженъ быть одинакъ съ противоположною стороной $а д$ (344): следовательно они должны быть и между собою одинаки. фиг. 180.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ $а в с$, $а в д$, каждый изъ угловъ $а с в$, $а в д$, долженъ быть одинакъ съ противоположною стороной $а д$; а посему, ибо $а в с$ есть исполненіе $а в д$, углы $а в с$ и $а с в$ должны быть не одинаки. фиг. 181.

Начала для рѣшенія косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

356. Рѣшеніе всѣхъ возможныхъ случаевъ косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, зависящихъ отъ пяти началъ, которые мы покажемъ, и отъ рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. Всѣ сии начала не нужны вдругъ для каждаго случая, но нужны для рѣшенія всѣхъ. Изъ сихъ пяти началъ, мы уже показали два въ §. 336 и 349; прочія же три здѣсь предлагаются.

357. Во всякомъ сферическомъ треугольнике $авс$, ежели ошъ угла $а$ опущена будетъ дуга $ад$ великаго круга, перпендикулярно, на противоположную сторону $вс$, фиг. 179.

Будетъ всегда сѣя пропорція: косинусъ опсѣка вв, къ косинусу опсѣка сс, такъ какъ косинусъ стороны ав, къ косинусу стороны ас.

Да будетъ с центръ шара, и опъ вершины углу а да будетъ опущенъ перпендикуляръ ај на плоскость ввс дуги ввс, будутъ онъ на плоскости асв дуги ав. Да будетъ проведены чрезъ прямую ај двѣ плоскости аје, ајг такъ, чтобъ радіусы св, сс были имъ перпендикулярны; а именно радіусъ св перпендикуляренъ плоскости аје, а радіусъ сс, плоскости ајг. Къ симъ самымъ радіусамъ да будутъ опущены отъ точки в перпендикуляры вн, вк.

Треугольники сје, сдн будутъ подобны, по причинѣ линий је, дн, перпендикулярныхъ къ св; по той же причинѣ, треугольники свк, сјг подобны. Слѣдовательно произойдутъ сѣи двѣ пропорціи:

$$сн : се :: сд : сј.$$

$$вгк : гф :: сд : сј.$$

И такъ ради общаго содержанія сд къ сј, будетъ сн : се :: сг : сф. Но сн есть косинусъ дуги вв (270); се косинусъ дуги ав; сг косинусъ дуги сс; и сф косинусъ дуги ас; чего ради кос. вв : кос. ав :: кос. сс : кос. ас; или полагая третій членъ на мѣстѣ второго, а второй на мѣстѣ третьего:

$$кос. вв : кос. сс :: кос. ав : кос. ас.$$

358. Положивъ тоже, что и въ предыдущемъ предложении, будетъ сѣя другая пропорція: синусъ вв, къ синусу сс, такъ какъ котангенсъ угла в, къ котангенсу угла с.

Послѣдую углы аеј, афј равны угламъ в и с каждый каждому, такъ какъ мы видѣли въ доказательствѣ §. 349: чего ради, ибо треуголь-

иных ΔJE , ΔJF прямоугольные, углы EAJ , FAJ суть комплементы угловъ AEJ , AFJ ; а посему и угловъ $в$ и $с$.

Положивъ сѣ, въ треугольникъ ΔEJ будешь (296), R : шан. EAJ или кош. $в$: ΔJ : JE ; и въ прямоугольномъ треугольникъ ΔJF , шан. JAF или кош. $с$: R : JF : AJ . И такъ (100) кош. $с$: кош. $в$: JF : JE .

Но подобные треугольники GFJ , GKD , и также подобные треугольники GEJ , GHD , дають сѣ пропорціи:

$$JF:DK::GJ:GD.$$

$$\text{и } JE:DH::GJ:GD.$$

$$\text{Слѣд. } JF:DK::JE:DH.$$

$$\text{или } JF:JE::DK:DH.$$

И посему также кош. $с$: кош. $в$: DK : DH ; но DK и DH суть синусы отвѣсковъ $ДС$ и $ДВ$; чего ради наконецъ кош. $с$: кош. $в$: син. $ДС$: син. $ДВ$.

359. Во всякомъ сферическомъ треугольникъ $авс$, ежели отвѣ одного изъ угловъ $а$ опущена будешь перпендикулярная дуга $ад$, на противуположающую сторону $вс$, будешь сѣ пропорція: тангенсъ половины стороны $вс$, къ тангенсу полусуммы двухъ прочихъ сторонъ, такъ какъ тангенсъ полуразности ихъ, къ тангенсу полуразности двухъ отвѣсковъ $сд$, $вд$, или къ тангенсу ихъ полу- фиг. 180. суммы. фиг. 181.

Доказано (357), что $\cos. AB:\cos. AC::\cos. BD:\cos. CD$; чего ради (98) $\cos. AB+\cos. AC:\cos. AB-\cos. AC::\cos. BD+\cos. DC:\cos. BD-\cos. DC$; но (287) $\cos. AB+\cos. AC:\cos. AB-\cos. AC::\cos. \frac{AC+AB}{2}:\tan. \frac{AC-AB}{2}$; и по сей же причинѣ $\cos. BD+\cos. CD:\cos. BD-\cos. CD::\cos. \frac{CD+BD}{2}:\tan. \frac{CD-BD}{2}$; слѣдовательно $\cos. \frac{AC+AB}{2}:\tan. \frac{AC-AB}{2}::\cos. \frac{CD+BD}{2}:\tan. \frac{CD-BD}{2}$; или кош. $\frac{AC+AB}{2}:\cos. \frac{CD+BD}{2}::\tan. \frac{AC-AB}{2}:\tan. \frac{CD-BD}{2}$.

$\frac{CD - BD}{2}$; или поуже (280) кошангенсы возвратно

пропорціональны тангенсамъ, тан. $\frac{CD + BD}{2}$ тан.

$$\frac{AC + AB}{2} :: \text{тан. } \frac{AC - AB}{2} : \text{тан. } \frac{CD - BD}{2}.$$

Но въ фигурѣ 180, $CD + BD$ равны BC ; а въ фигу-

рѣ 181, $CD - BD$ равна BC ; слѣдовательно для фи-

гуры 180, будемъ тан. $\frac{AB}{2}$: тан. $\frac{AC + AB}{2}$: тан. $\frac{AC - AB}{2}$:

тан. $\frac{CD - BD}{2}$; а для фиг. 181, будемъ тан. $\frac{CD - BD}{2}$:

тан. $\frac{AC + AB}{2} :: \text{тан. } \frac{AC - AB}{2} : \text{тан. } \frac{BC}{2}$; или тан. $\frac{AB}{2}$:

тан. $\frac{AC + AB}{2} :: \text{тан. } \frac{AC - AB}{2} : \text{тан. } \frac{CD + BD}{2}.$

Рѣшеніе косвенноугольныхъ сфери- ческихъ треугольниковъ.

360. Предложенныя предѣ симъ начала, и вто-
рая пропорція въ таблицѣ данной для прямо-
угольныхъ треугольниковъ, достаточны для рѣ-
шенія косвенноугольныхъ сферическихъ треуголь-
никовъ, или по крайней мѣрѣ для опредѣленія
синусовъ или тангенсовъ разлчныхъ частей со-
ставляющихъ сн треугольники. Много такихъ
случаевъ, въ которыхъ при данныя могутъ
опредѣлать все прочее; но есть много и такихъ,
гдѣ вопросъ остается неопредѣленнымъ; ибо сн
данныя не могутъ ограничить, чпо искомая
вещь больше или меньше 90° ; однакоже, хотя
вообще разсматривая, находимъ число сихъ по-
слѣднихъ случаевъ довольно немалое, весьма
рѣдко случается, въ обыкновенныхъ употребле-
ніяхъ сферической Тригонометріи, чпобъ не
извѣстно было, какого вида должна быть иско-
мая споруна, или искомый уголъ.

Прежде нежели приступимъ къ рѣшенію треу-
гольниковъ, напомнимъ, что синусъ, косинусъ,
тангенсъ и котангенсъ угла или дуги, суть шѣ-
же самыя, какъ для сей дуги или угла, такъ и
для суплементовъ ихъ.

361. Вычисленіе косвенноугольныхъ треу-
гольниковъ, можно привести къ шести случаямъ,
которыхъ рѣшеніе мы теперь покажемъ; а по-
томъ изъ оныхъ выведемъ рѣшеніе и прочихъ.

Вопросъ I. Даны двѣ стороны а в, а с, и
одинъ противолежащій уголъ в, сыскаемъ у-фиг. 180.
голъ противолежащій другой данной сто-
ронѣ.

Сдѣлай сію пропорцію (349): $\sin. ас : \sin. ав :: \sin. в : \sin. с$. Уголъ можетъ быть больше
или меньше 90° .

Вопросъ II. Даны двѣ стороны а в, а с, и
одинъ противолежащій уголъ в, сыскаемъ фиг. 180.
прешію сторону в с.

Отъ угла а, противолежащаго искомой сто-
ронѣ, вообрази дугу а д ей перпендикулярную;
и въ прямоугольномъ треугольникѣ а д в, вычи-
сли отсѣкъ в д, по сей пропорціи, которая по-
добна второй пропорціи вышепрiloженной та-
блицы:

$$\cos. в : r :: \cos. ав : \cos. в д.$$

или лучше $r : \cos. в :: \tan. ав : \tan. в д$.

Сія пропорція таже что и первая; ибо (280)
тангенсы возвращно пропорціональны котанген-
самъ.

А чшобы имѣть другой отсѣкъ с д, сдѣлай
сію пропорцію (357):

$$\cos. ав : \cos. а с :: \cos. в д : \cos. с в.$$

Тогда, судя по тому, что а д падаетъ вну-
три треугольника, или внѣ его, будемъ имѣть
в с, взявъ сумму или разность отсѣковъ в д и с с.

Вопросъ III. Даны два угла в и с, и одна
противолежащая сторона а в, сыскаемъ сш-фиг. 180
рону в с прилежащую симъ угламъ.

Отъ угла а, противулежащаго искомой стороне вс, вообрази дугу а д сей перпендикулярную; и въ прямоугольномъ треугольникѣ а д в, вычисли въ шою же пропорцію, какая употреблена во II вопросѣ:

к : кос. в :: тан. а в : тан. в д.

Для другаго отсѣка с д сдѣлай сію пропорцію (358):

кос. в : кос. с :: син. в д : син. с д.

А чѣмъ имѣшь вс, возьми сумму или разность отсѣковъ с д и д в, судя по шому, что перпендикуляръ падаетъ внутри треугольника, или внѣ его.

Вопросъ IV. Изъ данныхъ двухъ споронъ **фиг. 180.** ав и вс, и угла вѣ оныхъ содержимаго, находишь третью спорону а с.

Отъ одного изъ неизвѣстныхъ угловъ а, вообрази дугу а д, перпендикулярную противулежащей споронѣ вс; вычисли отсѣкъ в д, шою же пропорцію, какая была во II вопросѣ.

к : кос. в :: тан. а в : тан. в д.

Отними в д отъ извѣстной спороны в с (фиг. 180), или приложи оную къ сей споронѣ (фиг. 181), будешь имѣть отсѣкъ с д; потомъ для сысканія а с, сдѣлай сію пропорцію (357): кос. в д : кос. с д :: кос. а в : кос. а с.

фиг. 180. Вопросъ V. Изъ данныхъ двухъ споронъ ав, вс, и угла в содержимаго въ оныхъ, находишь одинъ изъ двухъ прочихъ угловъ; на примѣръ уголъ с.

Отъ третьяго угла а, проведи дугу а д, перпендикулярную къ противулежащей споронѣ вс; вычисли отсѣкъ в д, шою же пропорцію, какъ и во II вопросѣ.

к : кос. в :: тан. а в : тан. в д.

Отними в д отъ извѣстной спороны в с (фиг. 180), или приложи оную къ сей споронѣ

(фиг. 181) будешь имѣть отсѣкъ $сд$; а для угла $с$, сдѣлай сію пропорцію (358): $син. вд : син. сд :: кош. в : кош. с$.

Вопросъ VI. Изъ данныхъ трехъ сторонъ фиг. 180. $ав$, $ас$, $вс$, находишь одинъ изъ угловъ; на примѣрѣ, уголъ $в$.

Вообразивъ дугу $ад$ перпендикулярную къ сторонѣ $вс$ прилежащей искомому углу, вычисли полуразность двухъ отсѣковъ $вд$, $вс$, сею пропорціею (359): $тан. \frac{вс}{2} : тан. \frac{ав+ас}{2} :: тан. \frac{ав-ас}{2} :$

$тан. \frac{сд-вд}{2}$. Нашедъ полуразность, вычисли оную изъ половины $вс$; будешь имѣть (301) меньшій отсѣкъ $вд$; тогда, чтобы имѣть уголъ $в$, сдѣлай сію пропорцію, которая всегда таже, что и во II вопросѣ, но здѣсь превращена:

$$тан. ав : тан. вд : r : кос. в$$

Если перпендикулярная должна упасть внѣ треугольника, первая пропорція вмѣсто полуразности покажетъ полусумму: чего ради должно (фиг. 181) тогда для меньшаго отсѣка $вд$, вычесть половину $вс$ изъ сей полусуммы, ибо въ такомъ случаѣ $вс$ есть разность двухъ отсѣковъ.

Можно еще рѣшить сей вопросъ правиломъ подобнымъ показанному для такого же случая, въ прямоугольныхъ треугольникахъ. Сіе правило ссыльующее:

Возми полусумму трехъ сторонъ, изъ сей полусуммы вычисли порознь каждую изъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка.

Тогда къ двойному логарифму радиуса, приложи логарифмы синусовъ сихъ двухъ остатковъ, и изъ цѣлаго вычисли сумму логарифмовъ синусовъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; остатокъ будешь логарифмъ квадрата синуса.

половины сего угла. Возьми половину сего остального логарифма; и ищи какому числу градусовъ и минушъ она соотвѣствуетъ въ таблицахъ; сіе самое будетъ половина прѣбужаемаго угла.

Доказательство на сіе правило, равно какъ и на показанное (304) для прямолинейнаго треугольника, дадимъ въ прѣшей части.

367. Изъ предложенныхъ шести случаевъ можно вывести другіе шесть.

Вопросъ VII. Изъ данныхъ двухъ угловъ Γ и Δ , и одной прѣвивулежащей стороны $\Delta\Gamma$, находишь сторону $\Gamma\Gamma$, прѣвивулежащую другому извѣстному углу Δ .

Вообразивъ супплементный треугольникъ $\Delta\Gamma\Delta$, и взявъ супплементы угловъ Δ и Γ , и стороны $\Delta\Gamma$, будешь имѣть (336) стороны $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$, и уголъ Δ ; итакъ вычисляя уголъ Δ , по первому вопросу, супплементъ сего будетъ сторона $\Gamma\Gamma$. (336).

Впрочемъ сіе рѣшеніе даемъ мы единственно для сохраненія подобія съ слѣдующими случаями; ибо сей вопросъ рѣшается непосредственно показаннымъ предложеніемъ (349), дѣлая сію пропорцію: син. Γ : син. Δ :: син. Δ : син. $\Gamma\Gamma$.

Вопросъ VIII. Изъ двухъ угловъ Γ и Δ , и одной прѣвивулежащей стороны $\Delta\Gamma$, находишь прѣшій уголъ Δ .

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстныхъ будешь въ супплементномъ треугольникѣ стороны $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$, и уголъ Δ . Вычисли сторону $\Delta\Delta$ по II вопросу; супплементъ сей стороны будетъ величина угла Δ . (336).

Вопросъ IX. Изъ двухъ сторонъ $\Gamma\Gamma$, $\Gamma\Delta$, и одного прѣвивулежащаго угла Δ , находишь уголъ Γ , содержаемый въ двухъ данныхъ сторонахъ.

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстныхъ будешь въ супплементномъ треугольникѣ

А в с, уголъ в, уголъ с и сторона а в. Вычисли сторону в с по III вопросу; супплементъ оной будетъ величина угла е (336).

Вопросъ X. Изъ двухъ угловъ г и е, и стороны имъ прилежащей г е, находишь прешій уголъ ф. фиг. 182.

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ супплементномъ треугольникѣ а в с, стороны а в, в с, и содержимый уголъ в. Вычисли сторону а с по IV вопросу; супплементъ оной будетъ искомый уголъ ф (336).

Вопросъ XI. Изъ двухъ угловъ г и е, и стороны имъ прилежащей г е, находишь одну изъ двухъ прочихъ сторонъ; на примѣръ г е. фиг. 182.

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ супплементномъ треугольникѣ а в с, стороны а в, в с, и уголъ въ нихъ содержимый в. Вычисли уголъ с. по V вопросу; супплементъ е го будетъ величина стороны г е (336).

Вопросъ XII. Изъ данныхъ трехъ угловъ е, ф, г; находишь одну изъ сторонъ; на примѣръ сторону е г. фиг. 182.

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ супплементномъ треугольникѣ а в с, три стороны в с, а с, а в. Вычисли уголъ в, по VI вопросу; супплементъ угла в будетъ величина искомой стороны е г (336).

Не приступая къ примѣрамъ, примѣшнымъ, что хотя многіе случаи косвенноугольныхъ треугольниковъ требуютъ двухъ пропорцій; однакожъ находясь нѣкоторыя косвенноугольные треугольники, которые могутъ всегда рѣшимы быть одною только пропорціею. Таковы суть тѣ, которыхъ одна изъ сторонъ 90° ; ибо взявъ супплементный треугольникъ, будетъ онъ прямоугольный. Сферической треугольникъ, имѣющій одну изъ сторонъ равную 90° ; называется квадрантнымъ (четвертнымъ) треугольникѣ.

Предложимъ теперь нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ вопроса IV. Положимъ, что точка в означастъ положеніе Парижа на землѣ; точка **фиг. 166.** а положеніе Тулона. Извѣстно по наблюденіямъ астрономическимъ, что широта Парижа, или дуга вг равна $48^{\circ}, 50'$, а широта Тулона, или дуга ге равна $43^{\circ}, 07'$; и что разность долготы между Парижемъ и Тулономъ, или дуга ве, или уголъ вае или гag есть $3^{\circ}, 37'$. Спрашивается, какое есть самое кратчайшее разстояніе между Парижемъ и Тулономъ?

Самый кратчайшій путь на поверхности шара отъ одной точки до другой, есть дуга великаго круга, проходящаго чрезъ сѣи точки. Вообрази дугу гг великаго круга. Поневже каждая изъ дугъ ав, ае есть 90° , то вычтя изъ оныхъ дуги вг, ге, изъ которыхъ одна $48^{\circ}, 50'$, а другая $43^{\circ}, 07'$; найдутся дуги аг, аг, одна $41^{\circ}, 10'$, а другая $46^{\circ}, 53'$. Чего ради узнавъ въ треугольникѣ агг, двѣ стороны аг, аг, и содержимый уголъ гag , оспается вычислить третію сторону гг .

Изобразимъ треугольникъ гag треугольни- **фиг. 183.** комъ авс, и положимъ, что ав $41^{\circ}, 10'$, вс $46^{\circ}, 53'$, и уголъ в $3^{\circ}, 37'$. Итакъ по правилу показанному въ IV вопросѣ вычисляю ошѣкъ в д, ссю пропорцію:

г: кос. $3^{\circ}, 37'$:: тан. $41^{\circ}, 10'$: тан. в д.

Дѣлая по логарифмамъ, имѣю:

лог. кос. $3^{\circ}, 37'$	-	-	-	9. 9991342
лог. тан. $41^{\circ}, 10'$	-	-	-	9. 9417135
Сумма	-	-	-	19. 9408477.
Лог. рад.	-	-	-	1

Остатокъ или лог. тан. в д 9. 9408477.

Сей логарифмъ соотвѣствуетъ въ таблицахъ $41^{\circ}, 07'$; вычтя $41^{\circ}, 07'$ изъ вс, то есть изъ $46^{\circ}, 53'$, ошанется $5^{\circ}, 46'$ для ошѣка сп.

Чтобъ сыскать сторону ас, дѣлаю сходственно предписанному въ IV вопросѣ, сію пропорцію:

кос. $41^{\circ}, 07'$: кос. $5^{\circ}, 46'$:: кос. $41^{\circ}, 10'$: кос: ас.

Дѣлая по логарифмамъ, имѣю:

лог. кос. $41^{\circ}, 10'$ - - - - - 9, 8766785

лог. кос. $5^{\circ}, 46'$ - - - - - 9, 9977966

ариф. допол. лог. кос. $41^{\circ}, 07'$ - 0, 1229904

Сумма или лог. кос. ас - 19, 9974655.

Откуда по таблицахъ заключаю, что ас равна $6^{\circ}, 11'$, сіе количество, считая по 20 лигъ въ градусѣ, равно около 124 большимъ лигамъ; но среднихъ лигъ, которыхъ 25 въ градусѣ, приходится около 154.

Примѣръ VI вопроса. Говоря о способѣ снимать планы, мы сказали (138), что дадимъ средство приводить на горизонтальную плоскость углы, которые наблюдаемы были выше или ниже сея плоскости. Оное средство здѣсь предлагаемъ.

Да будутъ а, в, с три точки различно возвышенныя надъ горизонтальною плоскостію и к, фиг. 134. и да будутъ прямыя вб, аа, сс, перпендикулярныя къ сей плоскости, получивъ треугольникъ а в с, коего вершины угловъ точки а, в, с, представляющіе предмѣты а, в, с; такъ какъ они должны быть представлены на картѣ.

Полагая, что изъ точки а можно наблюдать двѣ точки в и с; спрашивается, что должно сдѣлать, дабы опредѣлить уголъ а.

Должно измѣрить изъ точки а уголъ в а с и углы в а а, с а а; первый можетъ быть измѣренъ безъ всякой трудности; въ разсужденіи каждаго изъ двухъ прочихъ, на примѣръ въ разсужденіи угла в а а, должно расположить инструментъ на вертикальной плоскости воображаемой чрезъ прямую ав, и поставя одинъ изъ дѣлителей горизонтально, посредствомъ отвѣса, которой тогда

означить прямую aa , . должно направить дру-
гой диаметр къ точкѣ b ; тогда увидимъ на
инструментѣ сколько градусовъ между отвѣсомъ
и диаметромъ направленнымъ къ точкѣ b ; что
покажетъ величину угла baa . Такимъ же обра-
зомъ найдемъ и уголъ caa .

Положивъ сіе, ежели предсказать, что ка-
кимъ нибудь радиусомъ ad и точкою a , какъ цен-
тромъ, написаны дуги df , dg , gf , на плоско-
стяхъ угловъ bac , baa , caa ; то составившя
сферическій треугольникъ dgg , въ которомъ из-
вѣстны будутъ стороны df , dg , gf , мѣры угловъ
 bac , baa , caa , кои были набаюдаемы; уголъ dgg
сего треугольника равенъ будетъ углу bac , пое-
лику двѣ прямыя ba , ac будучи перпендикулярны
пересѣченію aa двухъ плоскостей ab , ac . дѣлающе
тотъ же уголъ, что и сіи плоскости; чего
ради (320) сей уголъ равенъ сферическому углу
 dgg .

Положимъ же, что сіи углы bac , baa , caa
по измѣренію найдены, перьвой 82° , $10'$, второй
 77° , $42'$, третій 74° , $24'$; остается теперь вы-
числить уголъ b , противуположащій сторонѣ ac ,
которая равна 82° , $10'$ въ сферическомъ треуголь-
никѣ abc , коего три стороны ab , ac , bc , суть по
порядку 74° , $24'$, 82° , $10'$, 77° , $42'$. Чего ради со-
гласуясь съ тѣмъ, что сказано было въ VI вопросѣ,
вычисляю полуразность двухъ отвѣсовъ ad и cd , сею
пропорціею: $\text{тан. } \frac{bc}{2} : \text{тан. } \frac{ac+ab}{2} :: \text{тан. } \frac{ac-ab}{2} :$
 $\text{тан. } \frac{cd-db}{2}$; то есть, $\text{тан. } 38^\circ, 51' : \text{тан. } 78^\circ,$
 $17' :: \text{тан. } 3^\circ, 53' : \text{тан. } \frac{cd-db}{2}$.

Дѣлая по логарифмамъ, имѣю :

лог. тан. $3^{\circ} 53'$	- - - - -	8, 8317478
лог. тан. $78^{\circ} 17'$	- - - - -	10, 6832050
ариф. допол. лог. тан. $38^{\circ} 51'$	- - - - -	0. 0010569
Сумма или лог. тан. $\frac{CD-DB}{2}$		10, 6089097

Который соотвѣтствуетъ $22^{\circ} 07'$.

Вычтя $22^{\circ} 07'$ полуразность изъ половины вс, п. с. изъ $38^{\circ} 51'$; получимъ (301) меньшій отсѣкъ въ $16^{\circ} 44'$. Попомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ авв, чтобъ имѣть уголъ в, дѣлаю въ сходственностъ сказанному въ VI вопросе, сию пропорцію:

тан. ав: тан. вв :: r: кос. в; то есть,

тан. $74^{\circ} 24'$: тан. $16^{\circ} 44'$:: r: кос. в.

Дѣлая по логарифмамъ, имѣю:

лог. тан. $16^{\circ} 44'$	- - - - -	9, 4780592
лог. рад.	- - - - -	1.
ариф. допол. лог. тан. $74^{\circ} 24'$	- - - - -	89, 4459122

Сумма или лог. кос. в $108, 9239824$

Сей логарифмъ въ таблицахъ соотвѣтствуетъ углу $4^{\circ} 48'$, косяго комплементъ $85^{\circ} 12'$ есть величина угла в, то есть угла вас.

фиг. 184

Дабы привести уголъ с къ углу с, должно сдѣлать подобное вычисленіе, полагая, что наблюдаемы были углы, авс, асс, в всс.

Что касается до прешьяго угла в, не нужно его вычислять; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ авс при угла равны двумъ прямымъ.

примѣчаніе.

Полагая всегда, что каждая часть сферическаго треугольника не больше 180° ; можно ограничивать довольно простымъ правиломъ, ежели искомое должно быть меньше или больше 90° , или ежели неопредѣленно можеть быть и больше и меньше 90° . Вотъ сіе правило:

Если четвертый членъ пропорціи, которую должно сдѣлать для рѣшенія сферическаго треугольника, есть синусъ: дуга, къ которой онъ будетъ принадлежать, можетъ быть и меньше и больше 90° , исключая случаевъ, когда треугольникъ будетъ прямоугольный, и изъ трехъ извѣстныхъ частей одна противуположна искомой; въ такомъ случаѣ, (344) сн два послѣднія количества всегда между собою одинаки.

Но если четвертый членъ есть косинусъ, или котангенсъ, или тангенсъ; то въ разсужденіи извѣстныхъ членовъ пропорціи, наблюдай слѣдующее правило: дай знакъ + радіусу и всѣмъ синусамъ, хотя бы дугъ, къ которымъ они принадлежатъ, были больше или меньше 90° . Дай равноиѣрно знакъ + всѣмъ косинусамъ, тангенсамъ и котангенсамъ дугъ меньшихъ 90° ; и на противѣ дай знакъ — всѣмъ косинусамъ, тангенсамъ и котангенсамъ дугъ большихъ 90° : тогда, если число знаковъ — есть 0, или четное, дуга соотвѣствующая четвертому члену, будетъ всегда меньше 90° ; на противѣ же сего она будетъ больше 90° , если число знаковъ — есть не четное.

Сіе правило основано, т е, на правилѣ умноженія и дѣленія количествъ разсуждаемыхъ по ихъ знакамъ, что увидимъ въ Алгебрѣ; 2 с, на томъ, что примѣчено (273 и въ послѣд.) относително къ синусамъ, косинусамъ и проч. дугъ меньшихъ или большихъ 90° .

Прибавленіе ошъ переводчиковъ.

Въ дополненіе сказаннаго сочинишемъ о рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, присовокупимъ:

I. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не нужны пропорціи для рѣшенія сферическихъ треугольниковъ; а именно, когда сферической треугольникъ имѣетъ два или три угла прямые; ибо стороны противоположащія симъ угламъ будутъ по 90° (344); третія же сторона будетъ того же числа градусовъ, что и уголъ ей противоположащій (328). Также, когда сферической треугольникъ имѣетъ двѣ или три стороны по 90° ; то углы противоположащіе симъ сторонамъ будутъ прямые, а третій уголъ того же числа градусовъ, что и противоположная ему сторона. Наконецъ, когда сферической треугольникъ имѣетъ одну сторону 90° , и одинъ уголъ прямой; тогда есть въ немъ и другая сторона 90° , и другой уголъ прямой; третія же сторона будетъ того же числа градусовъ, что и уголъ ей противоположащій.

II. Косвенноугольные сферическіе треугольники, имѣющіе всѣ три стороны, или всѣ три угла взаимно равные; или у которыхъ двѣ стороны или два угла равны; легче рѣшятся посредствомъ прямоугольныхъ треугольниковъ, еслили ошъ прешьяго угла къ прешней сторонѣ опущена будетъ перпендикулярная дуга, которая сію сторону и сей уголъ раздѣлитъ по поламъ.

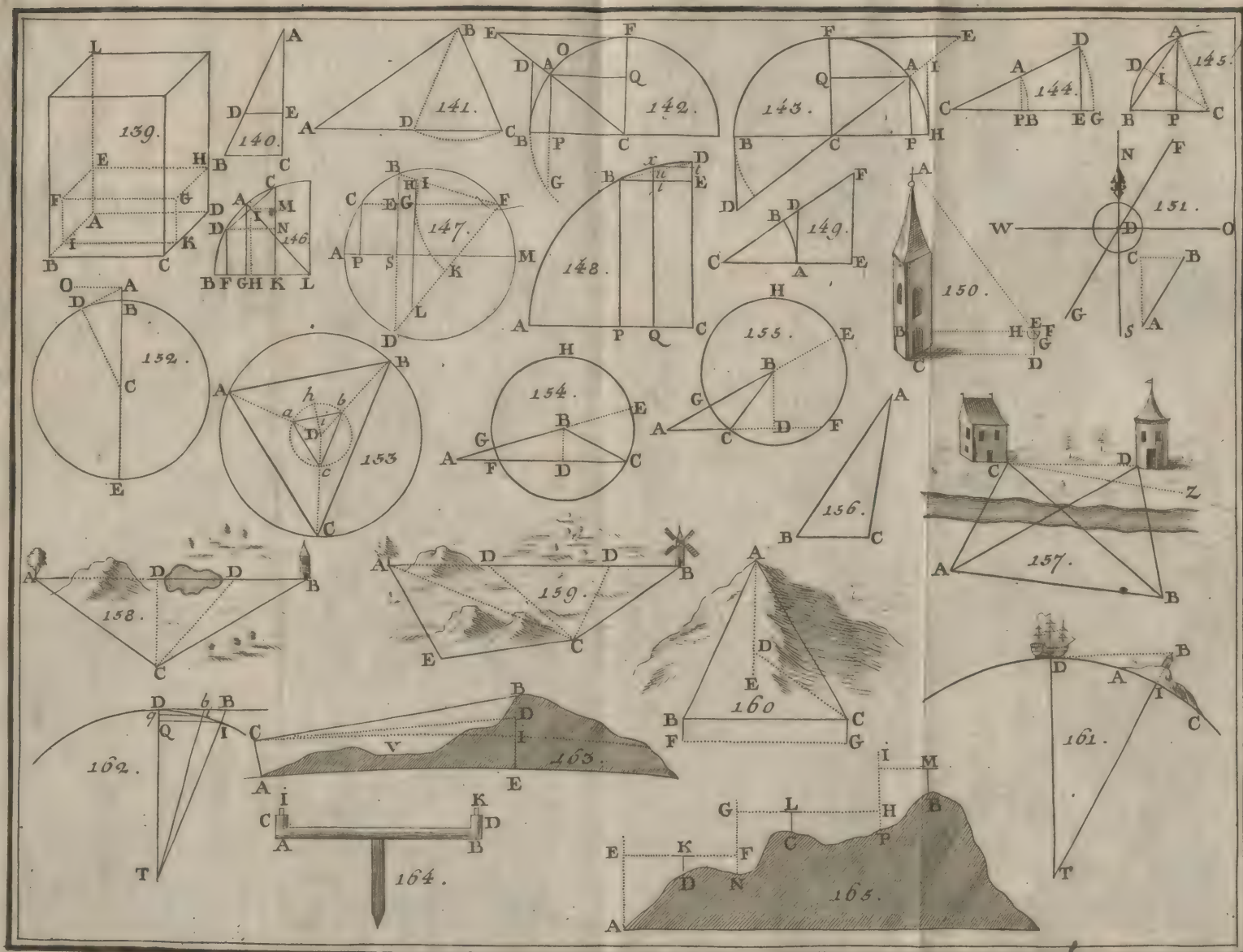
III. Косвенноугольные сферическіе треугольники, въ коихъ двѣ стороны, или два угла имѣютъ равны 180° , рѣшятся посредствомъ показанныхъ предъ симъ равнобедренныхъ треугольниковъ. Ибо еслили одна изъ тѣхъ двухъ сторонъ и также прешія сторона будутъ продолжены, пока

вторично вперѣшяся, по составится новой пре-
угольникъ, въ которомъ или двѣ стороны, или два
угла будутъ взаимно равны; чего ради разрѣшал
сей преугольникъ, разрѣшится и перьвой.

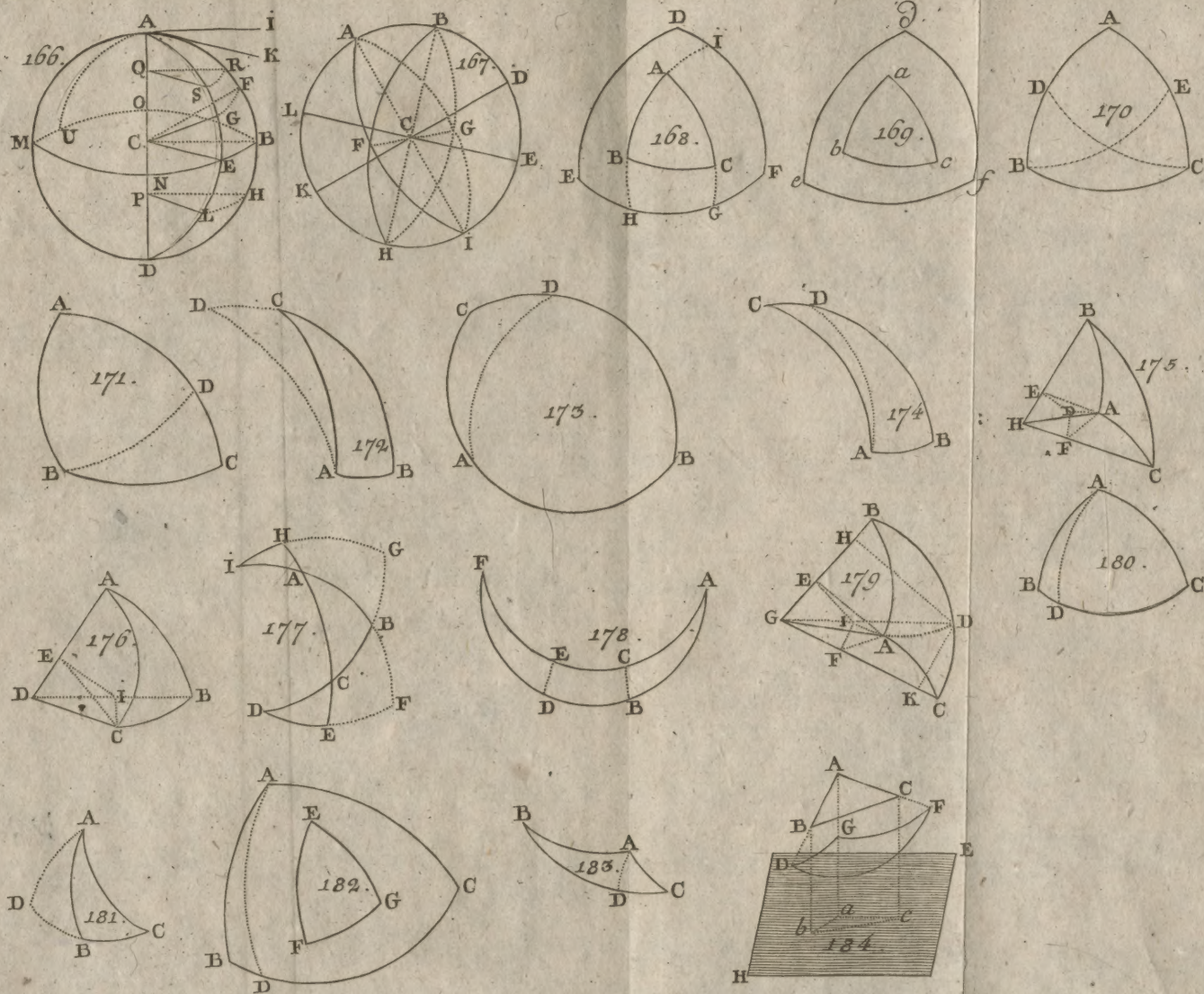
Здѣсь примѣшимъ, что ежели двѣ стороны
сферическаго преугольника равны 180° , то
и два угла имъ прошивулежащіе будутъ
равны 180° ; и обратно. Ибо ежели $ад + дв =$
г. 173. 180° , естъ же $сдв = 180^\circ$ (323), посему $ад = сд$;
и такъ уголъ $дас = дса$ (341) или два; чего
ради углы $два + дав = угламъ дас + дав$, по
естъ равны 180° . Обращное такимъ же образомъ
докажется. Подобно доказанъ можно, что ежели
двѣ стороны сферическаго преугольника
больше или меньше 180° , два угла имъ
прошивулежащіе будутъ больше или меньше
 180° , и обратно.

К О Н Е Ц Ъ.



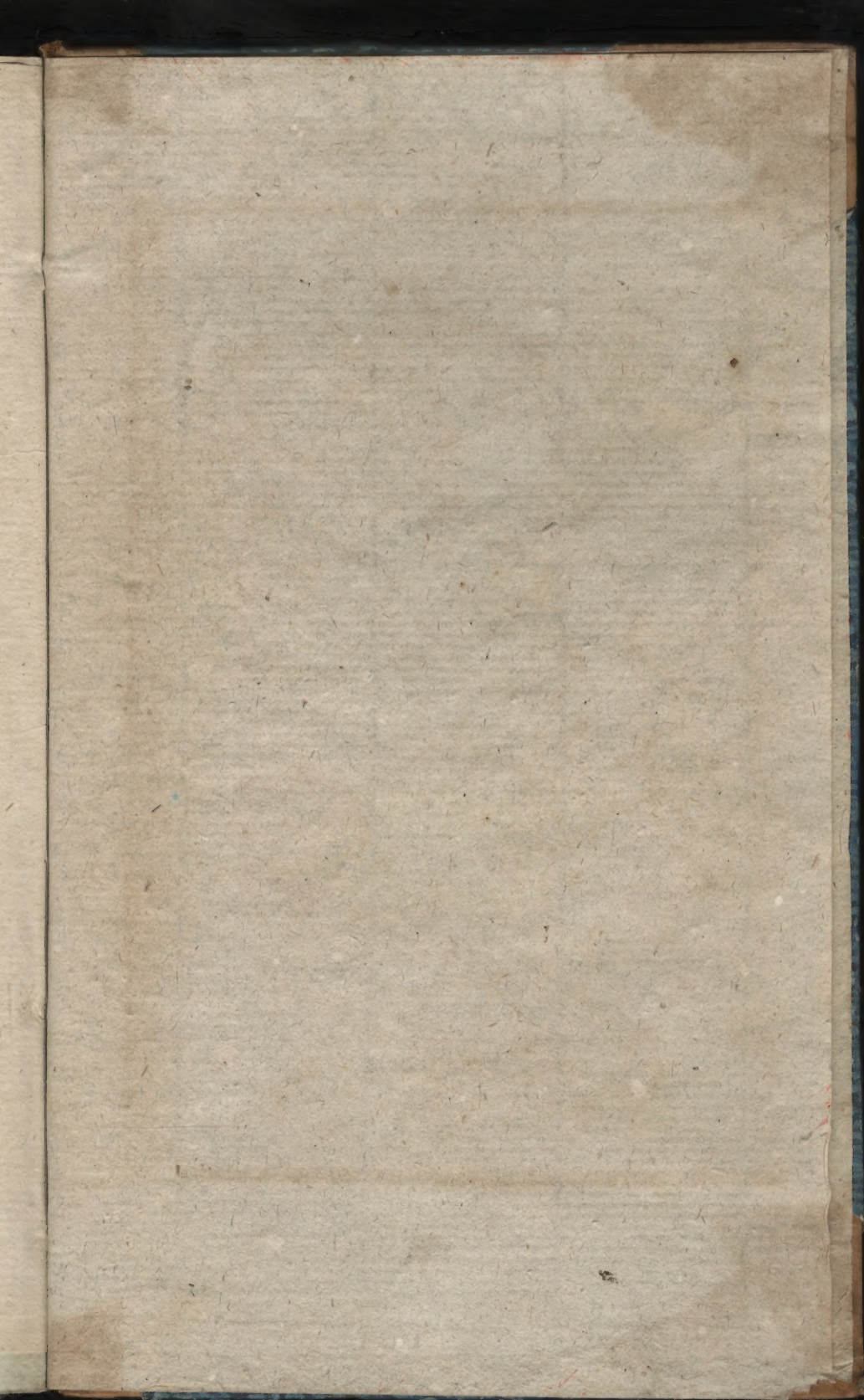






Kp-7668

Обм. 1963 г.
Акт РК-722/1



ГПБ Русский фонд

138

2945